# DIAMO I NUMERI!

## DOSSIER DIDATTICO

# INTRODUZIONE

*Il matematico è un fantasioso. Come il poeta o il pittore. Ai bambini racconto sempre la storia di Gauss, vissuto in Germania fra il Settecento e l'Ottocento. Un giorno a scuola il maestro, per punizione, dà il compito di sommare tutti i numeri da uno a 100. Roba da diventare matti! Ma Gauss escogita un trucco: somma 1+100, cioè il primo e l'ultimo numero della lista; poi 2+99, 3+98… E scopre che fa sempre 101. Visto che i numeri sono 100, deve sommare 50 coppie che insieme fanno 101. Gauss moltiplica 101×50 e consegna il compito per primo. Aveva 8 anni ed era un bambino molto fantasioso: è diventato uno dei più importanti matematici della storia"*

*Bruno D'Amore, matematico e pedagogo*
*Università di Bologna*

**Diamo i numeri!** (DIN) è un progetto che mira ad avvicinare la matematica ai giovani e al pubblico adulto senza sostituirsi alla scuola, ma creando una modalità non formale di incontro con il sapere dove l'esperienza, il piacere e le emozioni del singolo possano mettersi in gioco. La matematica, da scienza eccellente, sinonimo di saggezza, ponte tra culture, è diventata troppo spesso una disciplina odiata o mal sopportata. Paradossalmente questo avviene in un momento in cui si generano in ogni istante piogge di dati, di numeri sempre più difficili da gestire e interpretare. Fin da piccoli dobbiamo familiarizzare con tutto questo, poco alla volta, per diventare cittadini consapevoli di un mondo in cui saper contare ci aiuta anche a vivere meglio.

**Chi siamo**

Il progetto Diamo i numeri! – finanziato dal Fondo Nazionale Svizzero per la ricerca scientifica (FNS Agora) – nasce da una stretta collaborazione tra la Prof.ssa Antonietta Mira, responsabile scientifico del progetto (Professore di Statistica all'Università della Svizzera italiana e all'Università dell'Insubria), e L'ideatorio, che ha curato l'allestimento e l'organizzazione con la consulenza della Società Matematica della Svizzera italiana (SMASI) e il sostegno di numerose altre realtà locali.

Questa documentazione è stata scritta a più mani e in varie fasi. La prima bozza è stata scritta dallo staff de L'ideatorio in collaborazione con la Prof.ssa Antonietta Mira e Federica Bianchi della Facoltà di Scienze Economiche dell'USI. Il dossier si è poi arricchito grazie alla collaborazione della Prof.ssa Paola Mira (insegnante di matematica e scienze presso la Scuola media di Casorate Primo, Italia), della Prof.ssa Silvia Sbaragli (SUPSI) e di Luca Crivelli (SUPSI) per gli approfondimenti didattici e di Fabio Meliciani.

Non vuole essere un manuale scientifico ma uno spunto per i docenti che visitano l'esposizione e corrisponde alle informazioni del percorso espositivo di Diamo i numeri!

**Organizzazione del Dossier**

Il dossier consta di tre parti in linea con l'organizzazione della mostra DIN: DITA (matematica), DADI (probabilità) e DATI (statistica, big data, data science).

**Disclaimer**

Il presente documento è stato unicamente distribuito agli animatori dell'esposizione Diamo i numeri! e agli insegnanti che hanno visitato o animato la mostra, con preghiera di non diffondere il documento ad altri. Tutte le immagini sono Creative Common License.

**Video**

In questi 3 video potete visionare le postazioni delle 3 sezioni della mostra nell'allestimento a Pavia.
Può essere che nella versione della mostra che visiterete non siano presenti tutte le postazioni.
Dettagliate istruzioni su come costruire le singole postazioni sono disponibili a questo link:

https://fabiomelicianiscience.com/

DITA (matematica)
https://www.youtube.com/watch?v=mGw8cU7xoeA&t=4s

DADI (probabilità)
https://www.youtube.com/watch?v=7xIifSagq_E

DATI (statistica, data science)
https://youtu.be/HFgvPfdKOaU

A questi link potete ascoltare due animatori della mostra a Pavia che spiegano alcune delle postazioni:

Ilaria Lago spiega la corsa dei cavalli
https://youtu.be/zMVAjcsOFJU

Samuele spiega il SUDOKU colorato
https://youtu.be/FZWAXNJZJaI

# DIAMO

# I NUM3RI!

# DITA

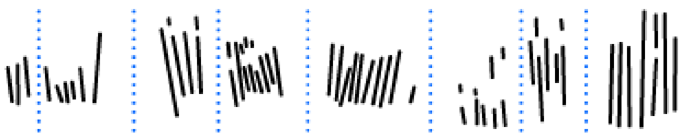
# FATTI PER CONTARE

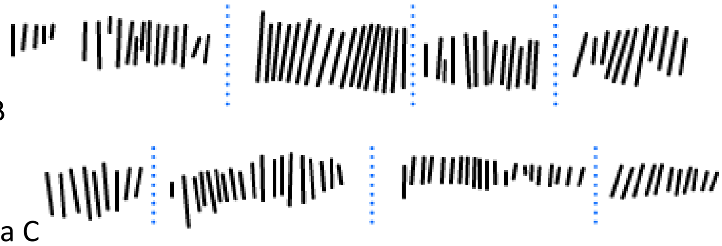
## L'OSSO DI ISHANGO

**Cos'è?** Le prime tracce dell'utilizzo dei numeri da parte dell'uomo risalgono a più di 35.000 anni fa e sono costituite da ossa intagliate con tacche che si pensa indichino un qualche tipo di conteggio – giorni, animali? Il reperto antico più famoso è l'osso di Ishango, un villaggio situato nella Repubblica Democratica del
Congo, datato tra il 20.000 a.C. e il 18.000 a.C. e risalente al Paleolitico superiore.

**Perché?** L'organizzazione delle tacche in tre coppie asimmetriche implica che questa disposizione sia stata intenzionalmente voluta. Ciò che si può dedurre è un primo passo verso la costruzione di un vero e proprio sistema numerico. La riga A – leggendo da sinistra verso destra – inizia con 3 tacche e ne seguono 6, il doppio. Lo stesso per quanto segue: 4 tacche, poi 8, per poi invertire il sistema col 10 che è seguito dal 5. Questi numeri, quindi, suggeriscono una comprensione della moltiplicazione e divisione per 2. Inoltre, numeri di tacche su entrambi i lati delle righe B e C sembrano indicare un'abilità di calcolo più importante. I numeri sono tutti dispari: 9, 11, 13, 17, 19 e 21. Quelli incisi nella riga B sono tutti numeri primi tra 10 e 20, mentre quelli sulla riga C sono composti seguendo la regola 10 + 1, 10 - 1, 20 + 1 e 20 - 1.

Riga A





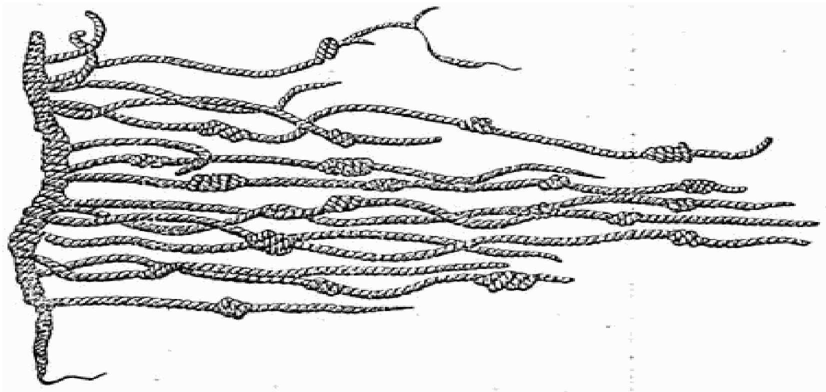
Riga B

Riga C

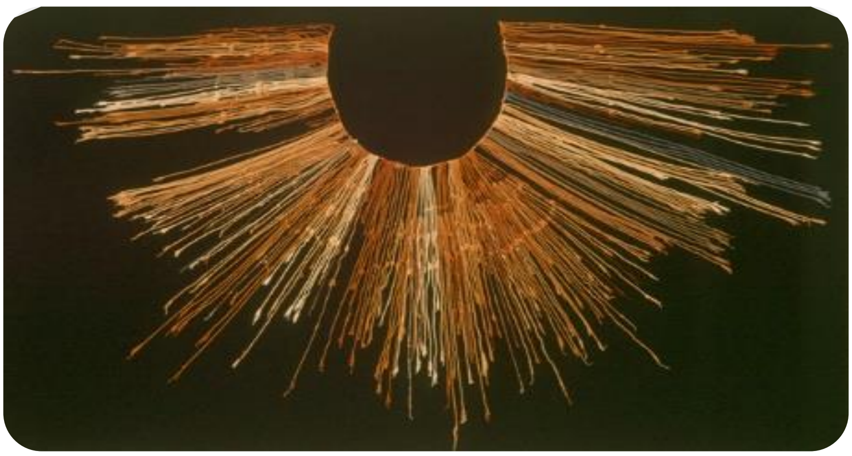
**Curiosità:** L'osso di Ishango è il perone di un babbuino con una scaglia tagliente di quarzo innestata a un’estremità, probabilmente utilizzata per incidere. Tra le ipotesi che meglio spiegano la disposizione di queste tacche, gli studiosi valutano si tratti del computo di una sequenza giorni e in particolare di un mese lunare. L’osso venne scoperto nel 1960 da Jean de Heinzelin de Braucourt (Belgio), durante un’esplorazione del ex Congo Belga. Venne trovato vicino ad Ishango, al confine tra Uganda e Congo. La popolazione che nel 20.000 a.C. vi abitava potrebbe essere stata tra le prime ad adoperare un sistema numerico. Il reperto è esposto al Museo reale di scienze naturali di Bruxelles.

# IL QUIPU

**Cos'è?** In lingua Quechua (lingua indigena originaria del Sud America) il quipo o quipu è un insieme di corde annodate a distanza regolare e legate a una corda più grossa e corta che le sorregge.



**Perché?** Alcune civiltà sviluppatisi in America Latina che ancora non avevano inventato i numeri, dovettero ingegnarsi per risolvere i problemi matematici concernenti il censo, le tasse, il conteggio degli articoli comprati o venduti, i calcoli astronomici, la descrizione di avvenimenti storici ed economici e naturalmente le operazioni aritmetiche. È possibile che il quipu venisse utilizzato dagli amministratori Inca per eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni per gli abitanti. Alcuni nodi registrati sui quipu non erano numeri, ma "etichette" di numeri che venivano usati come un codice, così come noi usiamo numeri per indicare oggetti, luoghi, persone, ecc. Anche altri elementi dei quipu, come la posizione e la distanza tra le corde, e i colori usati, rappresentavano informazioni.



**Curiosità:** Tutt'oggi il quipu resta un oggetto il cui uso non è stato totalmente spiegato. I quipu venivano costruiti per rimanere inalterati: dopo essere stati bagnati e fatti asciugare, venivano incollati con resine particolari. Ancora oggi, una versione più semplice del quipu viene usata dai pastori peruviani e boliviani. I quipu possono essere composti da poche corde, ma alcuni arrivano addirittura a 2000.

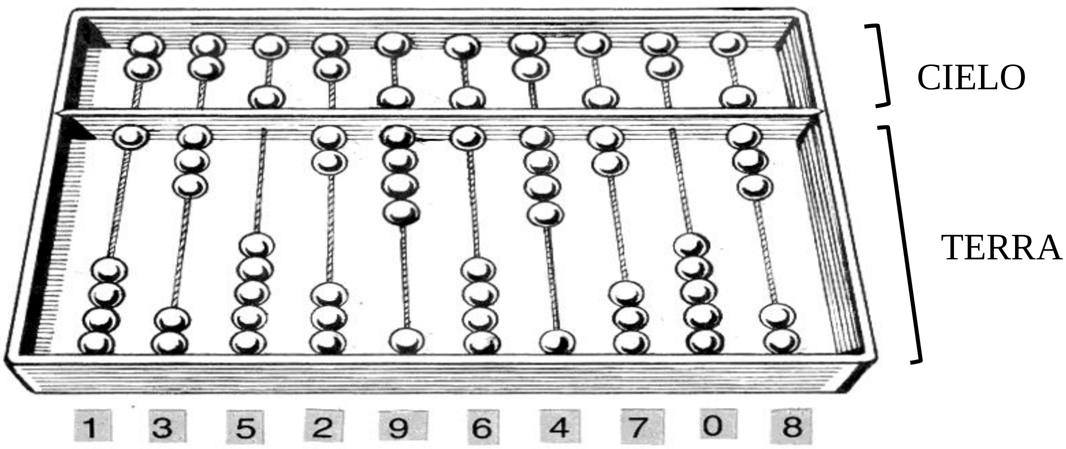
## BULLE E CONETTI PER CONTARE

Nella teca che trovate nella mostra, insieme all'Osso di Ishango e al quipu compaiono i conetti usati dai Sumeri per fare i conti. Abbiamo posticipato la trattazione dei conetti di conto nel capitolo successivo (In base a chi?), sotto la voce "Il sistema di conteggio dei Sumeri".

# L'ABACO

**Cos'è?** La parola abaco proviene dal greco *abaks* che significa tavolo, che a sua volta deriva dalla parola semitica *abaq* ovvero sabbia. Usato già al tempo di Greci e Romani, il più antico abaco consisteva in un tavolo coperto da un sottile strato di sabbia dove si facevano i calcoli con uno stilo.
L'abaco di tipo cinese è composto da una serie di aste che, da destra verso sinistra, indicano i diversi ordini di valore: sulla prima asta le unità, sulla seconda le decine, sulla terza le centinaia, sulla quarta le migliaia, ecc. Ogni asta contiene sette palline e una barra che divide cinque di queste – nella parte chiamata terra – da altre due – nella parte chiamata cielo –. Il valore di ciascuna pallina in "cielo" corrisponde a cinque volte quelle in "terra".

Esiste anche il modello con sei palline (abaco giapponese), più complicato nell'utilizzo, con 5 palline per la "terra" e 1 per il "cielo".




**Perché?** L'abaco è un antico strumento inventato dall'uomo per la risoluzione di calcoli ed è ancora oggi utilizzato nelle scuole cinesi per insegnare. Per rappresentare un numero si spostano le palline verso la barra orizzontale, ricordandosi che le palline nella parte superiore valgono cinque volte quelle della parte inferiore della stessa asta. Nella figura sopra il numero è il 1'352'964'708.

**Curiosità:** Nella Cina antica si adoperavano abachi con bacchette di bambù, successivamente prevalsero le tavole sulle quali venivano segnate linee e colonne di divisione che indicavano i diversi ordini di unità del sistema numerico in uso. Su queste linee venivano poi posti dei gettoni che rappresentavano i numeri così da poter realizzare qualsiasi tipo di calcolo.

Un importante difetto dell’abaco è che non permette di fissare le operazioni passate, così, se viene fatto un errore, bisogna ripetere tutto dall’inizio. Le aziende giapponesi ovviarono a questo problema facendo eseguire lo stesso calcolo a tre abacisti allo stesso tempo: se le tre soluzioni erano identiche, allora la soluzione era corretta.

Per imparare a rappresentare numero e a fare operazioni con l’abaco consigliamo questi video

https://www.youtube.com/watch?v=FTVXUG_PngE
https://www.youtube.com/watch?v=I8EZvig5fOU
https://www.youtube.com/watch?v=YQLjDD9SzGA COMPLEMENTARY METHOD

https://www.youtube.com/watch?v=22NdwzuEZi4 EXCHANGE METHOD
https://www.youtube.com/watch?v=r0aKV3HqDzA COMPLEMENTARY METHOD

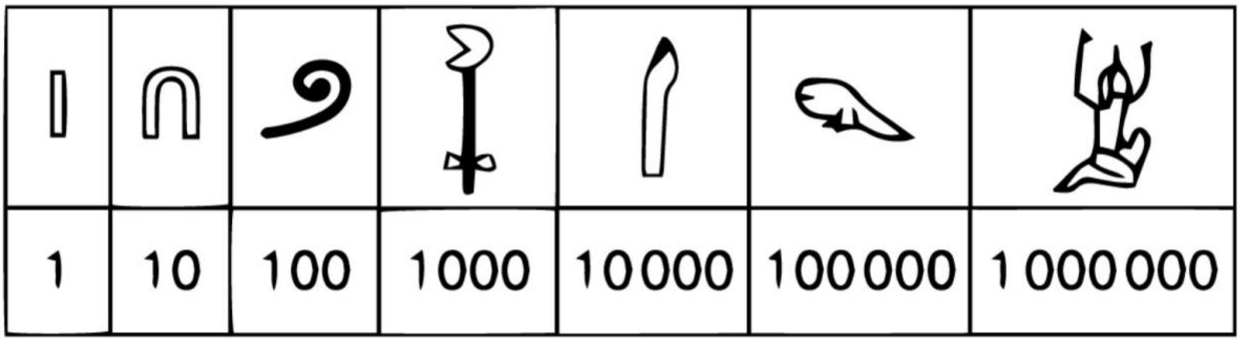
# IN BASE A CHI?

## SISTEMI DI CONTEGGIO

### I numeri egiziani

Epoca di introduzione: intorno al 3000 a.C.

Il sistema numerico egizio era piuttosto avanzato all'epoca in cui fu inventato. I numeri venivano rappresentati con i simboli mostrati nella figura. La posizione dei simboli non aveva una valenza specifica come nel nostro sistema che si dice, appunto, posizionale. Si trattava al contrario di un sistema additivo ovvero i valori dei simboli venivano addizionati.




Il nostro numero 1 era facile da scrivere per gli egizi in quanto avevano un simbolo specifico: una barra verticale diritta " **I**"

Anche il numero 10 era facile: una U rovesciata" ∩".

Ma ora immaginate come scrivere: "Ho 8 capre". Per farlo, dovevano ripetere otto volte il simbolo che rappresentava l'1 ed ottenere così "**IIIIIIII**"

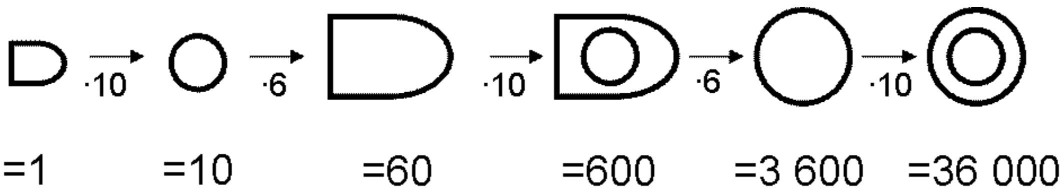
Se avessero avuto 16 capre, avrebbero dovuto scrivere: " ∩**IIIIII**" oppure potevano scrivere "**III**∩**III**" , anche questo significava 16, perché, come detto, la posizione dei simboli non aveva importanza.

Vale la pena anche di ricordare che gli Egizi hanno inventato la geometria – lo studio di punti, linee, angoli, superfici e solidi. Sapevano calcolare i volumi di cilindri e piramidi e le aree di diverse forme geometriche. I concetti geometrici che elaborarono erano utili per ricostruire i confini dei terreni agricoli lungo il fiume Nilo dopo le inondazioni. E di certo le stupefacenti Piramidi di Giza sono la prova che gli Egizi non solo inventarono la geometria, ma divennero maestri nel suo utilizzo.

## Il sistema di conteggio dei Sumeri

**Cosa sono?** I conetti di conto sono un sistema antico di conteggio utilizzato prima dell'invenzione dei numeri e vennero usati nelle zone degli attuali Iran e Iraq da Sumeri e Elamiti intorno al 3000 a.C. Erano fatti di argilla essiccata e la loro forma stabiliva il loro valore.

**Perché?** L'assenza dei numeri pose ai Sumeri il problema seguente: come rappresentare delle quantità e come fare calcoli complessi la cui risoluzione non può essere raggiunta col solo utilizzo di mente e mani? I Sumeri fabbricarono coni, gettoni, biglie e sfere per rappresentare valori diversi:




Piccolo cono / Biglia / Grosso cono / Grosso cono bucato / Grossa sfera / Grossa sfera bucata

I valori scelti dai Sumeri per i gettoni evidenziano l'utilizzo della base 60 con base ausiliare 10 per il loro sistema numerico. Le operazioni aritmetiche venivano realizzate manualmente, ovvero aggiungendo o sottraendo conetti: per le sottrazioni era spesso necessario prima "spicciolare" un gettone di un dato valore in gettoni di valore inferiore. Per risolvere la sottrazione 30 – 7 si doveva scomporre una delle biglie grandi "decina" in dieci unità costituite da piccoli coni, per poi togliere 7 piccoli coni, come indicato dalla sottrazione. Rimangono così 2 biglie grandi (decine) e 3 piccole (unità), quindi 23.

**Curiosità:** I conetti non erano solo uno strumento di calcolo: si poteva anche contrarre un prestito utilizzando una bolla di argilla nella quale venivano posti i conetti rappresentanti l'importo in questione. Poi essa veniva cotta o essiccata e firmata dalle parti. Si rompeva la bolla alla restituzione, controllandone l'importo. Successivamente vennero inventate delle tavolette d'argilla sulle quali venivano disegnati i conetti – e i corrispondenti valori dei prestiti – creando così dei simboli numerici. La tavoletta sotto mostra come veniva segnata la quantità di diversi oggetti in diverse caselle (III millennio a.C.).

## Il sistema di conteggio dei babilonesi

Epoca di introduzione: dal 1900 a.C. al 1800 a.C.

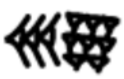
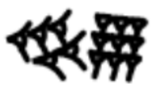
Il sistema di conteggio babilonese utilizza la base 60 invece della base 10 che usiamo oggi per contare nel mondo occidentale. Tuttavia, anche oggi contiamo alcune cose in base 60: per esempio, un'ora ha 60 minuti e un minuto ha 60 secondi. In un cerchio ci sono anche 360 gradi (6 · 60).Il loro sistema non è difficile da capire, anche perché nel sistema babilonese la posizione dei numeri era importante ovvero si trattava di un sistema posizionale.

I Babilonesi avevano solo due simboli:

 che rappresenta 1

 che rappresenta 10

Con questi due simboli si rappresentavano i numeri fino a 59. Ecco alcuni esempi:

 13  29  38  59

Neppure i babilonesi avevano un simbolo per lo zero. Tuttavia, in seguito "inventarono" un segno per lo zero e lo usarono solo al centro del numero, mai alle due estremità.

Anche i babilonesi, come noi, usavano le mani per contare. Ma noi abbiamo solo 10 dita. Come facevano quindi a contare i numeri più grandi?
Inventarono un nuovo sistema.

Con il pollice contavano i tre segmenti – falangi – delle altre quattro dita per arrivare a 12.

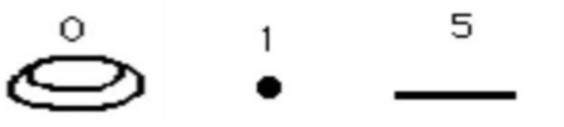

Segnavano poi il fatto di essere arrivati a 12 alzando un dito sull'altra mano.
E, in modo simile, segnavano il fatto di essere arrivati a24 alzando due dita su una mano e indicando il 12 sull'altra. Quindi $2 \cdot 12 = 24$


## I numeri dei Maya

Epoca di introduzione: intorno al 500 a.C.

La matematica Maya è il sistema di conteggio più sofisticato mai sviluppato nell'antichità. Utilizza un sistema basato sul 20, che probabilmente è stato sviluppato utilizzando le dita delle mani e dei piedi per contare.

Il sistema prevede solo tre simboli: un punto che rappresenta il valore di $1$, una barra orizzontale che rappresenta il $5$e un cerchio all’interno di un altro cerchio che rappresenta lo zero$0$. Tuttavia, lo zero Maya era usato solo come segnaposto e non per i calcoli.




Questi simboli, utilizzati in varie combinazioni, erano stati ricavati da oggetti reali di uso quotidiano: lo zero da una conchiglia, il punto da un fagiolo e la barra da un bastone di legno.

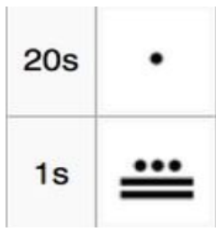
Le addizioni e le sottrazioni erano semplici e anche le persone non istruite potevano fare i conti necessari per il commercio e gli scambi.

Per sommare due numeri, ad esempio, i simboli di ciascun numero venivano affiancati e poi uniti per ottenere un nuovo numero singolo. Così, a due barre e un singolo punto che rappresentano il numero $11$può essere aggiunta una barra per il cinque, per ottenere tre barre e un punto, ovvero $16$. Questo vale se si rimane entro il 20, altrimenti va considerato il valore posizionale.

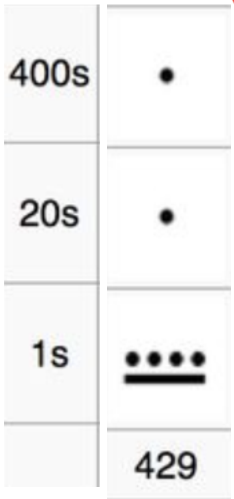
La posizione di un simbolo rispetto ad un altro era importante per i Maya: più in alto era posizionato un simbolo, maggiore era il suo valore. Il suo valore aumentava in base alle potenze di venti.

Ecco due esempi:

33 si scrive con un punto sopra i simboli di $13$. Il punto sopra rappresenta “una ventina” o “$1 \times 20$”, che si aggiunge a $13$.
Pertanto, $(1 \times 20)\ +\ 13\ =\ 33$.



Il numero $429$ in simboli Maya viene rappresentato come in figura: il simbolo del nove in basso, un punto sopra che rappresenta il $20$ e un altro punto sopra che rappresenta $20 \times 20 = 400$.




## I numeri romani

Epoca di introduzione: dalla fondazione di Roma antica 753 a.C.

Il sistema numerico romano è stato utilizzato per quasi 1800 anni prima di essere sostituito dal sistema indo-arabo che utilizziamo oggi. Questo avvenne nel 1300, quindi solo 720 anni fa!
Come gli Egizi e i Babilonesi, anche i Romani non avevano lo zero. Inoltre, il sistema romano era additivo.

I numeri romani erano rappresentati da "lettere":

| | |
|---|---|
| I = 1 | C = 100 |
| V = 5 | D = 500 |
| X = 10 | M = 1000 |
| L = 50 | |

Queste "lettere" venivano messe in fila per ottenere dei numeri. In romano, 72 sarebbe **LXXII** ovvero: **L** = $50$, **X** = $10$, **I** = $1$ quindi $50 + 10 + 10 + 1 + 1 = 72$

Per i numeri più lunghi i Romani inventarono una nuova regola. Fu adottata una notazione sottrattiva, dove **VIIII**, ad esempio, fu sostituito da **IX** ($10 - 1 = 9$). Questo semplificava un po' la scrittura dei numeri lunghi, ma rendeva il calcolo ancora più difficile.

Prendiamo il numero $19$. Seguendo la prima regola di cui sopra, si sarebbe scritto $19$ in "romano" come: **XVIIII** ($10 + 5 + 4 = 19$), ma con la nuova regola è diventato XIX – cioè $10 + 10 - 1$ uguale a $19$. E il numero $14$ – **XIIII** – diventa **XIV**.

Questa nuova regola si applica solo ai numeri che sono pari o inferiori a dieci volte il valore del numero precedente. Ad esempio: $1999$ non può essere scritto come **MIM**, perché **M** è mille volte il valore di **I**. In questo caso si deve procedere in questo modo:

$1999$ in romano è **MCMXCIX**
Ovvero **M** $(1000)$ + **CM** $(1000 - 100)$ + **XC** $(100 - 10)$ + **IX** $(10 - 1)$

## I numeri degli antichi Indiani

Epoca di introduzione: iniziata intorno al 600 a.C.

Il più antico zero documentato è sorprendentemente moderno: si trova nel tempio di Chaturbhuj a Gwalior, nel Madhya Pradesh nell'India centrale, e risale all'875 a.C. circa. Il tempio è famoso per essere il più antico esempio di numero scritto zero: è inciso sulla parete del tempio, parte del numero "270", chiaramente visibile.

Gli arabi portarono il sistema numerico indo-arabico in Europa e oggi è utilizzato in tutto il mondo occidentale.

Gli indiani contano come gli occidentali, almeno fino a 99999 e la posizione dei numeri è importante. A partire da 100000, i nomi dei numeri indiani sono diversi.
100000 si chiama centomila in Occidente e un lakh in India.
1000000 si chiama un milione in Occidente e dieci lakh in India.
10000000 si chiama 10 milioni in Occidente e un crore in India.
Sono altri nomi per numeri ancora più alti ma ci fermiamo qui.

Anche gli indiani scrivono i numeri in modo diverso dagli occidentali. La posizione delle virgole e dei punti varia:
100000 è scritto in Occidente come 100.000 o 100,000 (centomila) e in India 1.00.000 (un lakh);
30000000 è scritto in Occidente come 30.000.000 o 30,000,000 (trenta milioni) e in India 3.00.00.000 (3 crore).

## Come contano i computer?

Periodo di introduzione:
Il sistema binario è stato inventato intorno al 1700, i computer intorno al 1940.

Il computer conosce solo due numeri: 0 e 1. Tutto qui!
0 rappresenta "off" e 1 rappresenta "on". "Off" e "on" si riferiscono all'interruttore elettronico, che può essere acceso o spento. Ad esempio, accendendo l'interruttore, la luce si accende. Nei vecchi computer c'erano molti interruttori che potevano essere accesi e spenti per rappresentare numeri diversi.

Questo sistema di "uno" e "zero" è chiamato sistema binario.
L' "uno" e lo "zero" sono chiamati bit. Bit è la forma abbreviata di **Bi**narydig**IT**.
All'interno di un computer i bit sono solitamente in numero di otto.
Otto bit sono chiamati byte. Ad esempio, 10011010 è un byte.

Qualsiasi canzone, film, foto, libro, immagine e così via può essere tradotta in una sequenza di uno e zero. Queste sequenze rendono visibili sullo schermo del computer video e foto. Incredibile, no?
Più bit/byte ha un computer, più informazioni (foto, testi, video, musica, …) può memorizzare.

Il sistema binario era già stato inventato nel 1703 dal filosofo e matematico tedesco Gottfried Wilhelm Leibniz. Egli scrisse una documentazione completa del sistema binario che fu poi utilizzata dagli inventori del computer. Queste prime macchine avevano un aspetto molto diverso dai computer di oggi, ma funzionavano tutte su questa base binaria.
Oggi gli *smartphone* sono molto più potenti dei primi computer!

**Approfondimenti didattici**
Proporre alcuni aspetti storici della matematica, in particolare i vari sistemi numerici che si sono susseguiti nel tempo e sono stati creati da diverse culture, e gli strumenti di conteggio da loro utilizzati, consente di perseguire diverse finalità:
- vivere esperienze di conteggio e di rappresentazione del numero in modalità diverse da quella a cui siamo abituati, aprendo così lo sguardo alla molteplicità di soluzioni;
- comprendere più in profondità il nostro sistema numerico, dato che è dal confronto con altri sistemi che si riesce a capire meglio come funziona quello che quotidianamente utilizziamo;
- confrontare gli strumenti antichi con quelli che utilizziamo oggi;
- intuire che ogni cultura ha fatto scelte differenti rivolte tutte allo stesso fine (il desiderio di effettuare conteggi) e che ogni scelta è da considerarsi condivisibile, così da sensibilizzare il rispetto dell'altro;
- comprendere che la matematica non è una disciplina statica, ma in continua evoluzione;
- percepire che la matematica è stata fatta dall'uomo per l'uomo;
- appassionare alla matematica.

Per quanto concerne la scuola elementare, i diversi sistemi di numerazione delle varie culture che si sono susseguiti nel tempo, e gli strumenti di conteggio da loro utilizzati, vengono considerati tra i materiali del progetto "MaMa–matematica per la scuola elementare", commissionati dal Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport al Centro competenze didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento / Alta scuola pedagogica di Locarno (Svizzera). Tali materiali sono gratuitamente scaricabili a questo link: https://mama.edu.ti.ch/.
In particolare, si suggerisce di consultare:
- le *Linee guida* per avere degli approfondimenti matematici, didattici e storici relativi ai diversi sistemi numerici degli antichi. In questo documento vengono presentati anche alcuni strumenti

storici, inclusi quelli qui presentati, utilizzati da varie culture. Questo documento può essere utile anche per i livelli scolastici successivi;

- il *Contesto di senso* "Matematica in viaggio nello spazio e nel tempo", un documento in cui sono forniti degli spunti per progettare significative situazioni di apprendimento legate alla matematica delle diverse culture, utilizzata in diversi periodi storici;
- la *Pratica didattica* "I sistemi numerici degli antichi", un documento in cui sono raccolte delle proposte didattiche relative, fra gli altri, ai sistemi numerici degli uomini primitivi, dei Sumeri, degli Incas, degli Egizi, dei Maya, dei Babilonesi e dei Romani; la pratica didattica "Diversi algoritmi di calcolo", dove vengono proposti diversi algoritmi, alcuni dei quali si sono susseguiti nella storia e hanno caratterizzato diversi luoghi; - la pratica didattica "Cifre e sistema posizionale", in cui sono presenti molti spunti legati al sistema numerico indo-arabo, fra cui la costruzione di un piccolo abaco.

- le *Schede didattiche* pensate per gli allievi, che è possibile trovare impostando il filtro "Altri sistemi numerici" nel motore di ricerca dei materiali didattici. In particolare, si segnalano: "La gara di velocità", "Dieci tacche", "I numeri sumeri 1", "I numeri sumeri 2", "I numeri sumeri 3", "I numeri sumeri 4", "I numeri inca 1", "I numeri inca 2", "I numeri romani 1", "I numeri romani 2", "I numeri romani 3", "I numeri romani 4", "I numeri maya 1", "I numeri maya 2", "I numeri maya 3", "I numeri maya 4", "I numeri egizi 1", "I numeri egizi 2", "I numeri egizi 3", "I numeri egizi 4", "Gara tra sistemi", "Sistemi a confronto", "Calcoli antichi", "L'uso dell'abaco", "Conosciamo l'abaco", "Decimali che passione", "Laura non distrarti".

Inoltre, nella raccolta "Matematici a fumetti", scaricabile gratuitamente online o acquistabile in formato cartaceo edito dalla casa editrice Dedalo, sono disponibili 22 fumetti legati a importanti matematici che si sono susseguiti nella storia. In particolare, per un approfondimento sulla nascita del nostro sistema di numerazione si veda il fumetto del matematico Al-Khwārizmī (IX sec.).

Per i docenti attivi nella scuola media è inoltre a disposizione il materiale didattico chiamato "Matematica nella storia", integrato da schede di approfondimento e di lavoro per gli allievi che si possono scaricare dal portale ScuolaLab (dove è necessario registrarsi per poter scaricare i documenti).

I seguenti libri narrativi, adatti fin dalla scuola elementare, sono incentrati sul conteggio e possono essere messi in relazione con l'uso dell'abaco e altri strumenti di conteggio:

- Abedi, I. (2002). *Una, due, tre… 99 pecore!* La Margherita Edizioni.
- Bellei, M. (2020). *Città di numeri*. Fatatrac.
- Cerasoli, A. (2012). *La grande invenzione di Bubal*. Emme Edizioni.
- Cerasoli, A. (2019). *Le sorelle cinque dita*. Editoriale scienza.
- Chermayeff, I. (2014). *Topolini ciechi e altri numeri*. Corraini.
- D'Angelo, S. (2008). *Mai contare sui topi*. Topipittori.
- Fromental, J. L., & Jolivet, J. (2010). *10 piccoli pinguini*. Il Castoro.

- Giusti, A. (2011). *Awa insegna a contare.* Il giardino di Archimede
- Ohmura, T. (2011). *Tutti in coda!* Babalibri.
- Tolstoj, A. (1999). *La rapa gigante*. Fabbri.
- Urberuaga, E. (2015). *Una cosa nera*. Lapis.

Da questo punto di vista si segnala la ricca raccolta di recensioni "100 albi illustrati fra italiano e matematica: una bibliografia con spunti didattici" scritta Demartini e Sbaragli.

I seguenti libri narrativi, adatti fin dalla scuola elementare, sono incentrati sulla storia della matematica:
- Cerasoli, A. (2012). *La grande invenzione di Bubal*. Emme Edizioni.
- Giusti, A. (2011). *Awa insegna a contare.* Il giardino di Archimede
- Petti, R. (2008). *Uri, il piccolo sumero*. Il giardino di Archimede.
- Petti, R. (2008). *Ahmose e i 999'999 lapislazzuli.* Il giardino di Archimede.

Inoltre, per un approfondimento storico e didattico rivolto agli adulti, si consigliano i seguenti riferimenti:
- Boyer, C.B. (1982). *Storia della matematica*. Mondadori.
- Bunt, L., Jones, P. S., & Bedient, J.D. (1987). *Le radici storiche delle matematiche elementari*. Zanichelli.
- Ifrah, G. (1989). *Storia universale dei numeri*. Arnoldo Mondadori. [Ed. orig. in lingua francese: 1981).
- D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica*. Pitagora.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia. I. Dalle origini al miracolo greco*. Edizioni Dedalo.
- D'Amore B., & Sbaragli S. (2018). *La matematica e la sua storia: dal tramonto greco al medioevo*. Edizioni Dedalo.
- Fontana Bollini, V., & Lepori, G. (2019). Un percorso di storia della matematica nella scuola media: la quadratura di figure piane. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula*, (6), 131-150.
- Nicosia, G. G. (2008). *Numeri e culture*. Erickson.
- Vecchi, N. (2010). *Come sono nati i numeri. Un percorso didattico dagli uomini primitivi all'abaco*. Roma: Carocci.

Si ripotano inoltre di seguito alcuni articoli dove l'abaco è usato come strumento. Alcuni lo portano ad esempio, altri lo comparano con altri artefatti come la pascalina.
- Bartolini-Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, *746*.
- Bartolini-Bussi, M. G., & Boni, M. (2003). Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms. *For the learning of mathematics*, *23*(2), 15-22.
- Maschietto, M. (2013). Systems of instruments for place value and arithmetical operations: An exploratory study with the Pascaline. *Education*, *3*, 221-230.

# I NUMERI NOTEVOLI

## NUMERO DI NEPERO "e"

Il numero di Nepero, spesso indicato con la lettera "e", è una delle costanti matematiche più importanti e viene utilizzato in diverse aree della matematica, della scienza e dell'ingegneria. Il suo valore approssimato è circa 2,71828. Il numero di Nepero è una costante irrazionale e trascendente, il che significa che non può essere rappresentato come una divisione di numeri interi e non è soluzione di alcuna equazione algebrica con coefficienti interi. Questo lo rende un numero molto speciale nella teoria dei numeri.

Il numero di Nepero è definito dalla serie infinita:

$$e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! + \dots$$

Dove "!" (fattoriale) rappresenta il prodotto di tutti i numeri interi positivi fino al numero specificato. Ad esempio, 5! (5 fattoriale) è uguale a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Il numero di Nepero emerge naturalmente in diversi contesti matematici, come il calcolo differenziale e integrale, l'analisi complessa, le equazioni differenziali, la teoria delle probabilità e il calcolo esponenziale. È ampiamente utilizzato in calcoli di crescita e decadimento esponenziale, nonché nella valutazione di interesse continuo in matematica finanziaria.

Il nome "numero di Nepero" deriva dal cognome del matematico svizzero Leonhard Euler, che frequentemente usava il soprannome "Nepero". Tuttavia, l'uso del nome "e" per rappresentare questa costante è stato introdotto dal matematico inglese Charles Maclaurin nel 1718.

## PI GRECO "$\pi$ "

Il numero π (pi greco) è una costante matematica fondamentale che rappresenta il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro. È una costante irrazionale, il che significa che il suo valore decimale non può essere espresso con precisione come frazione e ha una rappresentazione infinita e non periodica. Il simbolo "π" deriva dalla lettera greca "pi" (π), che è la prima lettera della parola greca "perimetros", che significa "circonferenza".
Il valore approssimato di π è 3,14159265358979323846… e così via, ma non esiste una rappresentazione esatta sotto forma di frazione. La frazione $\frac{22}{7}$ è spesso usata come approssimazione di π, ma è solo un'approssimazione e non è esatta.

Il numero π è utilizzato in molte aree della matematica e della scienza, inclusa la geometria, la trigonometria, il calcolo, la fisica. È una delle costanti matematiche più importanti e compare in molte formule e relazioni fondamentali. Ad esempio, nell'area di un cerchio, l'area A è data da $A = \pi r^2$, dove $r$ è il raggio del cerchio.
Ci sono competizioni di memorizzazione per il calcolo delle cifre decimali di π, in cui le persone cercano di ricordare e recitare più cifre decimali possibile. Il record mondiale di memorizzazione delle cifre decimali di pi greco è circa 70.000!
Con l'avvento dei computer, è stato possibile calcolare miliardi di cifre decimali di π, e questa attività è stata eseguita da molti appassionati e ricercatori. Tuttavia, per la maggior parte delle applicazioni pratiche, poche cifre decimali di π sono sufficienti.

**Festa di Pi:** Il 14 marzo (3/14 in formato mese/giorno negli Stati Uniti) è spesso celebrato come il "Giorno di Pi" (Pi Day) perché la data corrisponde alle prime tre cifre di π (3.14). A causa della somiglianza nella pronuncia delle parole "pi" e "pie" (che significa "torta" in inglese), è comune vedere immagini di torte celebrative nel Giorno di Pi.

**Rapporto di Cifratura:** Il numero π è spesso utilizzato in crittografia e sicurezza informatica per generare sequenze casuali e per creare algoritmi di cifratura.

## ZERO

Il "numero zero" è un numero intero che rappresenta l'assenza di valore o la quantità nulla. È un concetto fondamentale nella matematica. Il numero zero è l'unico numero che non è positivo né negativo e svolge un ruolo cruciale nel sistema numerico e nei calcoli matematici.
Il concetto di zero ha una storia che risale a molte culture antiche, inclusi i Babilonesi e gli Egizi, che avevano simboli per rappresentare il vuoto o l'assenza. Anche i Maya avevano un simbolo per lo zero, usato in senso posizionale. Tuttavia, il sistema di numerazione posizionale con zero come lo conosciamo oggi fu sviluppato principalmente in India. I matematici indiani, tra cui Brahmagupta e Aryabhata, svilupparono il concetto di zero come numero e come segno posizionale nel sistema numerico indiano. Introdussero il concetto di "sunya" o "shunya", che significa "vuoto", e iniziarono a usare il simbolo "0" per rappresentare questo concetto.

Lo zero fu poi trasmesso all'Occidente attraverso la cultura araba e i commerci. I matematici arabi adottarono il sistema indiano e lo introdussero nell'Europa medievale. Inizialmente, il concetto di zero era trattato con scetticismo in Europa. Alcuni matematici europei lo vedevano come "niente" e non come un vero numero. Ci volle del tempo prima che il concetto fosse pienamente accettato.
L'introduzione del numero zero e del sistema numerico posizionale ha rivoluzionato il calcolo e l'algebra, rendendo più agevoli i calcoli e consentendo lo sviluppo di metodi più potenti per risolvere equazioni e svolgere operazioni matematiche.

Oltre ad essere un numero, il concetto di zero ha assunto un significato più ampio nella filosofia e nella teoria dei numeri, rappresentando spesso l'idea di vuoto, assenza o inizio. Nel campo dell'ingegneria e delle scienze, il concetto di zero è essenziale per rappresentare livelli di energia, temperature e altre grandezze fisiche. È anche fondamentale per rappresentare i sistemi binari nei computer.

Nelle operazioni matematiche lo zero è l'elemento neutro nella somma. Sommare zero a qualsiasi numero non cambierà il valore del numero. Ad esempio, $5 + 0 = 5$. Inoltre qualsiasi numero elevato alla potenza di zero rimarrà uguale a se stesso $n^0 = 1$ .

## UNO

Il numero uno è il più semplice dei numeri interi ed è l'unità fondamentale nel sistema numerico. È il primo e più piccolo numero intero positivo e rappresenta l'idea di singolarità, individualità e unicità. Il simbolo matematico per il numero uno è "1", che deriva dall'antica notazione romana e al contempo richiama le antiche tacche nel legno.
Nelle operazioni matematiche uno è l'elemento neutro nella moltiplicazione. Moltiplicare qualsiasi numero per uno non cambierà il valore del numero. Ad esempio, $5 \times 1 = 5$. Inoltre qualsiasi numero elevato alla potenza di uno rimarrà uguale a se stesso$n^1 = n$ ed anche uno elevato a qualsiasi numero resterà uno $1^n = 1$.

Nel sistema binario (base 2) utilizzato nei calcolatori, qualsiasi numero è rappresentato da una sequenza di bit "1" e “0”. Questo bit è fondamentale per rappresentare i dati digitali.

Il numero uno non è considerato un numero primo, poiché i numeri primi devono avere esattamente due divisori positivi distinti. Il numero uno ha solo un divisore: se stesso.

## INFINITO

In matematica il simbolo ∞, chiamato "simbolo dell'infinito", sembra un numero 8 capovolto e rappresenta un concetto molto interessante: l'idea di infinità.
Ad esempio, pensate ai numeri naturali. Immaginate di elencarli: 0, 1, 2, 3, 4 e così via. Non importa quanto andiamo avanti, non finiremo mai di contare, vero? Dopo un numero aggiungendo 1 si ottiene sempre un numero successivo. Questo è un po' come il simbolo dell'infinito. Ci dice che possiamo continuare a contare e andare avanti all'infinito.

Il simbolo dell'infinito rappresenta proprio questa idea di “infinità di elementi”, di "senza fine".

Oltre a contare, il simbolo dell'infinito può essere usato in molte altre situazioni. Nei problemi di matematica più avanzati, lo vedrete nei limiti, che sono come dire "cosa succede quando qualcosa si avvicina sempre di più all'infinito?". Anche quando parliamo di curve che si avvicinano a una retta senza mai toccarla, possiamo usare il simbolo dell'infinito per rappresentare questo concetto. Quindi, il simbolo dell'infinito descrive qualcosa che continua senza mai finire. È un po' come pensare all'orizzonte che si estende all'infinito, o come abbiamo già visto alla sequenza dei numeri che continua per sempre.

Quando vedrete il simbolo dell'infinito, state pensando a qualcosa che è senza fine. È un po' come una porta aperta verso un mondo di possibilità che non ha confini!

**Approfondimenti didattici**

I numeri *e* di Nepero e il *pi greco*, essendo irrazionali, e il complesso tema dell'infinito, non rientrano in modo esplicito nel "Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese" per quanto concerne la scuola elementare, ma sono "numeri notevoli" che vengono trattati nei livelli scolastici successivi. Fin dalla scuola elementare sono invece affrontati in profondità il numero 0 e il numero 1, sia come elementi dell'insieme dei numeri naturali, enfatizzando per lo 0 il fondamentale ruolo nel nostro sistema decimale posizionale, sia come elementi neutri di alcune operazioni.

Proporre attività legate ai "numeri notevoli" permette di perseguire diverse finalità:

- cogliere le caratteristiche di specifici elementi del nostro sistema numerico;
- comprendere più in profondità la struttura del nostro sistema numerico decimale posizionale;
- conoscere alcuni importanti matematici del passato che si sono occupati di questi straordinari numeri, le loro scoperte e la loro rilevanza da un punto di vista scientifico e storico;
- saper approfondire uno specifico argomento matematico.

Per quanto concerne la scuola elementare, il tema dell'infinito e delle particolarità dei numeri 0 e 1 all'interno del nostro sistema numerico vengono considerati tra i materiali del progetto "MaMa–matematica per la scuola elementare". Tali materiali sono gratuitamente scaricabili a questo link: https://mama.edu.ti.ch/.

In particolare, si suggerisce di consultare:

- le *Linee guida* per avere degli approfondimenti matematici, didattici e storici sull'insieme dei numeri naturali, sul ruolo dell'infinito, e sul ruolo dei numeri 0 e 1 nelle operazioni;
- la *Pratica didattica* "Attività tra matematica e lingua nel secondo ciclo" in cui è possibile approfondire il tema della crittografia;
- le *Schede didattiche* pensate per gli allievi, che è possibile trovare utilizzando il sistema di filtri nel motore di ricerca dei materiali didattici. In particolare, si segnalano: "Lo zero nel più e nel meno", "Il ruolo dello zero", "Lo zero nella divisione", "Lo 0 nei decimali", "Pari o dispari?", "Naturali o pari?", "Parliamo di successioni", "Multipli e divisori di 1".

Lo 0 è protagonista di alcune filastrocche, canzoni e giochi legati al progetto "A spasso con i numeri naturali" curato dal Centro didattica della matematica del Dipartimento formazione apprendimento / Alta scuola pedagogica della SUPSI di Locarno insieme alla RSI KIDS, di prossima uscita online.

Per approfondire il numero *pi greco* è possibile visionare il divertente video "Televendita del π" della serie "Matematicando Ciak!", che consiste in una raccolta di video per uso didattico. Nel video "Alla ricerca dello zero", invece, è proprio il primo numero naturale a essere il protagonista. Per divertirsi a ritmo di musica sul tema dell'infinito, si può ascoltare la canzone "L'infinito sai cos'è?".
Per approfondire il numero *pi greco* e il numero *e* nella storia e individuare attività rivolte alla scuola superiore è possibile consultare l'attività di Matabel "Quanto sono reali i numeri trascendenti?" o l'interessante podcast su *pi greco* della rassegna "Fantamatematica" (storie quasi vere di matematici e altra gente con problemi.

Per quanto concerne la crittografia è possibile scaricare il poster "Come proteggere le informazioni?" legato alla proiezione del film "La teoria del tutto", mostrato all'interno della rassegna cinematografica Matematicando film.

Nella raccolta "Matematici a fumetti", scaricabile gratuitamente o acquistabile in formato cartaceo edito dalla casa editrice Dedalo, sono disponibili 22 storie legate a importanti matematici della storia. Per un approfondimento sul matematico, fisico e astronomo Leonhard Euler, è possibile consultare il fumetto Euler (XVIII sec.), dove viene affrontato in modo divulgativo un famoso teorema della teoria dei grafi. Per un approfondimento su alcune storiche scoperte relative all'infinito, si può scaricare il fumetto di Cantor (XIX sec.).

Riferimenti bibliografici per uso didattico:
- Cerasoli, A. (2011). *I magnifici dieci*. Editoriale Scienza.
- Cerasoli, A. (2011). *Le avventure del signor 1*. Emme Edizioni.
- Cerasoli, A. (2015). *Tutti in festa con pi greco*. Editoriale Scienza.
- Feniello, A. (2014). *Il bambino che inventò lo zero*. Editori Laterza.
- Melis, A. (2007). *Il principe Zero*. Edizioni Piemme.
- Novelli, L. (2015). *Ciao, sono zero*. Valentina Edizioni
- Rittaud, B. (2014). *1, 2, 3… infinito!* Edizioni Dedalo.
- Rodari, G. (1980). *Il trionfo dello zero*. Edizioni EL.

Inoltre, per un approfondimento storico e didattico rivolto agli adulti, si consigliano i seguenti riferimenti:
- Arrigo, G., D'Amore, B. & Sbaragli, S. (2020). *L'infinito matematico. Storia, epistemologia e didattica di un tema affascinante.* Pitagora.
- D'Amore, B., Asenova, M., Del Zozzo, A., Fandiño Pinilla, M.I., Iori, M., Nicosia, G. G., & Santi, G. (2021). *I numeri. Matematica, storia, giochi e curiosità, per una didattica corretta ed efficace*. Pitagora.
- D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2009). *Zero*. Erickson.

- García del Cid, L. (2015). *Numeri notevoli*. RBA.
- Odifreddi, P. (2020). *Ritratti dell'infinito*. Rizzoli.
- Villani, V. (2003). *Cominciamo da zero.* Pitagora.

# GLI ANIMALI CONTANO?

**Questa sezione è liberamente ispirata e tratta da questo link a cui rimandiamo per approfondimenti:**
https://alessadra.wordpress.com/2010/01/18/animali-matematici-2/

**Il corvo che sapeva contare fino a 5**
(da un racconto del 1700)

*Un contadino cercava di uccidere un corvo che nidificava in cima a una torre nei suoi terreni, ma ogni volta che si avvicinava, il corvo volava via e ritornava solo quando il contadino si era allontanato entrando in casa. Il contadino chiese aiuto a un vicino, ma il corvo li eludeva sempre uscendo solo quando erano entrambi erano rientrati in casa. Con l'aumento del numero di contadini, il corvo aspettava sempre che tutti rientrassero in casa prima di tornare al nido. Solo quando cinque contadini rientrarono in casa e uno rimase fuori, il corvo tornò al nido e venne ucciso.*

*Questo solleva la questione se il corvo sapesse contare solo fino a cinque. Gli studi condotti dall'etologo Otto Koehler sessant'anni fa suggeriscono che alcuni uccelli, come Jacob, un corvo, possono associare il numero di punti su un coperchio a quello su un cartoncino e distinguere tra numeri da 2 a 6. Gli animali, compresi gli uccelli, hanno la capacità di confrontare quantità e ricordare numeri in tempi successivi. Secondo lo psicologo cognitivo Stanislas Dehaene, sia gli animali che gli esseri umani hanno una rappresentazione intuitiva delle quantità, anche se non contano in modo esatto come noi.*

**Tacchini, pulcini e altri volatili matematici**

*Non solo i corvi, ma anche altre specie di uccelli dimostrano abilità matematiche. Otto Koehler addestrò tacchini a sollevare coperchi di scatole per ottenere un numero specifico di pezzi di cibo, fermandosi quando raggiungevano la quantità desiderata. Anche i canarini furono addestrati a scegliere la quinta pastiglia tra gabbie comunicanti, dimostrando abilità numeriche. Il pappagallo africano Alex, istruito dalla psicologa Irene Pepperberg, imparò un vasto vocabolario, compresi i numeri da uno a sei, e rispondeva correttamente a domande sul numero di oggetti in un vassoio, anche se non li aveva mai visti prima.*

*Studi recenti condotti da Giorgio Vallortigara hanno rivelato che anche i pulcini sono in grado di contare fino a cinque e organizzare numeri in ordine crescente da sinistra a destra, simile a quanto viene fatto dagli umani. Gli uccelli dimostrano così una sorprendente capacità di comprensione e utilizzo dei concetti numerici.*

## I leoni sanno contare?

*L'esperimento condotto da Karen McComb nel Parco del Serengeti in Tanzania coinvolse una leonessa che, udendo ruggiti sconosciuti, dedusse la presenza di intrusi nel suo territorio. Inizialmente, quando sentì un solo ruggito, la leonessa proseguì per cercare il suo gruppo, temendo uno scontro alla pari. Successivamente, udendo un coro di ruggiti, dedusse la presenza di tre intrusi ma si trovava in compagnia di altre quattro leonesse del suo gruppo, portando il loro totale a cinque contro tre.*

*La leonessa leader si avvicinò al punto di origine dei ruggiti e, insieme alle altre, si precipitò tra gli alberi. Tuttavia, non trovarono alcun intruso; i ruggiti provenivano da un altoparlante utilizzato nell'esperimento di McComb. Brian Butterworth, un docente di neuropsicologia all'University College di Londra, suggerì che il comportamento della leonessa leader potesse essere spiegato dall'enumerazione dei ruggiti uditi e dei membri del suo gruppo, confrontando poi i due numeri. Questo dimostra la capacità della leonessa di astrarre la numerosità degli insiemi di intrusi e difensori indipendentemente dalla modalità sensoriale con cui li percepisce, sottolineando la loro notevole abilità nel campo della cognizione numerica.*

## Ratti astuti

*Gli esperimenti degli anni '50 e '60 dimostrarono che anche i ratti possiedono una percezione del numero. In un esperimento, i ratti venivano posti in una gabbia con due tasti, "A" e "B", per ottenere una piccola razione di cibo dovevano premere il tasto "A" un certo numero di volte prima di passare al tasto "B". Se commettevano un errore nella sequenza prevista, veniva loro inflitta una penalità, come una leggera scossa elettrica o lo spegnimento della luce. Inizialmente, i ratti impararono a premere "A" più volte e "B" una sola volta, ma successivamente riuscirono a rifinire il numero di volte che dovevano premere "A" in base al numero "n" stabilito dall'addestratore.*

*Non sempre il numero "n" era preciso, ma i ratti rispondevano in modo approssimato, ad esempio, se dovevano premere "A" 4 volte, poteva capitare che premessero da 3 a 7 volte. L'esperimento fu ulteriormente affinato introducendo un altoparlante che emetteva sequenze di suoni, confermando così la capacità dei ratti di riconoscere approssimativamente il numero di oggetti, suoni o porzioni di cibo. Ciò dimostra la loro capacità di percepire e utilizzare concetti numerici approssimativi.*

## Le abilità matematiche dei nostri cugini scimpanzé

*Gli scimpanzé, attraverso numerosi esperimenti, hanno dimostrato competenze nell'aritmetica di base. Un esempio notevole è Ai, addestrata al Kyoto University Primate Research Institute, in grado di riconoscere numeri arabi da 0 a 9 associati a oggetti e di ordinarli in modo crescente o decrescente. Sheba, un altro scimpanzé, ha superato Ai dopo un lungo addestramento, dimostrando la capacità di sommare oggetti e indicare il risultato utilizzando simboli numerici astratti invece di oggetti concreti.*

*Kanzi, un bonobo, è un "genio" tra le scimmie, residente presso il centro di ricerca linguistica dell'Università della Georgia negli Stati Uniti. Ha appreso oltre cento termini osservando gli sforzi di insegnamento del linguaggio umano alla madre, Matata. Kanzi ora comunica con i ricercatori, anche a distanza tramite il telefono, e riconosce concetti astratti come bene e male, dimostrando una notevole capacità di comprensione del linguaggio e dei concetti oltre a quelli concreti. Questi studi evidenziano le abilità cognitive e linguistiche sorprendenti degli scimpanzé e dei bonobo.*

## Fenomeni da circo

*Gli animali "sapienti" addestrati per esibirsi in circhi e teatri hanno sempre suscitato interesse, spesso grazie a trucchi con gli addestratori. Un esempio noto è Hans l'astuto, un cavallo tedesco addestrato da Wilhelm von Osten, un insegnante di matematica. Hans sembrava capace di risolvere problemi di matematica e compitare parole. Durante le esibizioni, il pubblico poneva domande, come "Quanto fa 4 + 6?", e Hans rispondeva colpendo il terreno con uno zoccolo il numero corretto di volte.*

*Nel 1904, una commissione d'inchiesta presieduta da Carl Stumpf fu convocata per esaminare le abilità di Hans. Dopo un'approfondita analisi, conclusero che non c'erano trucchi nelle sue performance. Tuttavia, Oskar Pfungst, uno studente del presidente della* *commissione, dimostrò che Hans riceveva segnali da persone nel pubblico o da von Osten che indicavano quando smettere di battere lo zoccolo. Questi segnali erano involontari, come un movimento delle ciglia o un cambiamento nella tensione dell'interrogante quando il cavallo si avvicinava alla risposta giusta. In realtà, Hans non aveva competenze matematiche, ma era sensibile a involontari segnali non verbali che gli indicavano quando fermarsi. Questo caso evidenzia l'importanza di indagini scientifiche approfondite per svelare l'apparente abilità numerica degli animali addestrati.*

## Conclusioni

*Le potenzialità e i limiti dell'intelligenza matematica negli animali rimangono una domanda senza risposta definitiva. Lo studio dell'intelligenza animale è ancora in una fase approssimativa, ma nuovi strumenti di indagine recentemente disponibili consentono di esplorare l'attività cerebrale e i circuiti neurali legati alla matematica, sebbene siano ancora in fase iniziale per gli animali rispetto agli esseri umani.*

*Secondo Stanislas Dehaene, gli esseri umani condividono con animali come topi, piccioni e scimmie una rappresentazione mentale delle quantità che consente di numerare rapidamente insiemi di oggetti, eseguire operazioni di addizione e confrontare le cardinalità, tutto senza il bisogno del linguaggio. Queste capacità, ereditate dall'evoluzione, permettono di stimare la grandezza di un insieme e possono anche influenzare la comprensione dei numeri espressi simbolicamente, come in cifre arabe. In sintesi, l'intuizione delle grandezze numeriche ereditata dall'evoluzione potrebbe svolgere un ruolo fondamentale nello sviluppo della matematica avanzata negli esseri umani. Tuttavia, molte domande rimangono aperte, e la ricerca continua a esplorare le capacità matematiche degli animali.*

**Approfondimenti didattici**

Il tema delle competenze numeriche degli animali consente di sensibilizzare verso diverse finalità:

- comprendere che l'essere umano non è l'unico depositario del sapere;
- cogliere collegamenti con l'ambiente circostante, in particolare con il mondo animale;
- aprire lo sguardo all'interdisciplinarietà.

Un riferimento adatto agli adulti, utile per approfondire il tema, è il seguente:

- Bagini, B. & Dulio, P. (2016). *Matematica per conigli*. TAM Editore.
- D'Amore, B. (2007). *Matematica dappertutto*. Pitagora.

# QUANTI SONO?

## LA SAGGEZZA DELLA FOLLA

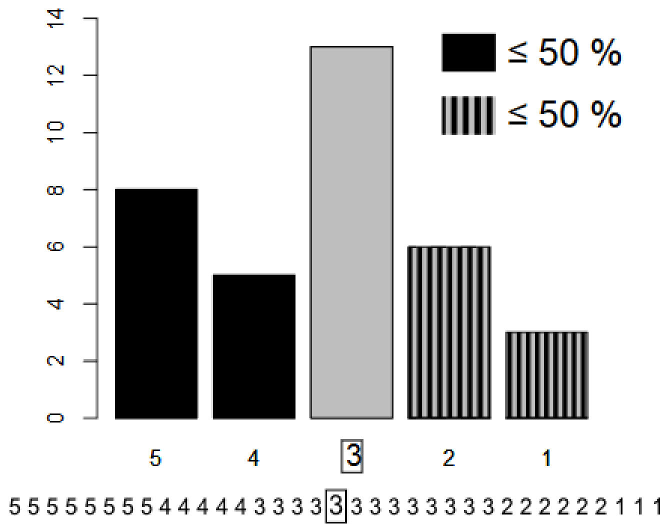
**QUESTA POSTAZIONIE PUO' INDIFFERENTEMENTE STARE NELLA SEZIONE DITA O DATI in quanto l'idea è di contate quanti oggetti ci sono nei contenitori in plexiglass ma poiché è difficile contarli si stima la loro quantità.**

**Cos'è?** Quante caramelle ci sono nel vaso di vetro? La matematica ci dice che la stima migliore la troviamo appellandoci a quella che gli studiosi chiamano "L'intelligenza della folla" (o la saggezza della folla), una teoria sociologica secondo la quale un insieme di persone è in grado di realizzare qualsiasi stima meglio di quanto siano in grado di farlo degli esperti.

**Perché?** Nel 1906 l'antropologo e statistico Francis Galton, cugino del celebre Charles Darwin, durante una fiera del bestiame chiese al pubblico di stimare il peso di un bue. Raccolse tutte le stime e notò che la mediana – messi in ordine crescente tutti i valori, la mediana è il valore di mezzo – delle risposte fornite dalla folla si avvicinava di più alla realtà rispetto alle risposte date singolarmente dagli esperti presenti.
In termini matematici, la mediana di un insieme di dati corrisponde al valore che si trova esattamente a metà nella sequenza ordinata (in modo crescente o decrescente) dei dati. Nella figura riportata sotto compare l'istogramma relativo ad un insieme di dati. I valori dei dati sono:

5,5,5,5,5,5,5,5,4,4,4,4,4,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2,2,2,2,2,1,1,1 e corrispondono al numero di componenti di 34 famiglie: alcune famiglie sono composte da una sola persona, nello specifico ci sono 3 famiglie di questo tipo. Ci sono poi famiglie con 2, 3, 4 fino ad arrivare a 5 componenti.

Il primo passaggio è ordinare i dati e in questo caso li abbiamo già ordinati in modo decrescente. Il secondo passaggio è trovare il valore che occupa la posizione centrale. Questo valore corrisponde alla mediana, 3 nell'esempio.




**Curiosità:** La teoria della saggezza della folla trova grande applicazione su internet e in particolar modo in siti come *Yahoo! Answers* e *Wikipedia*, che basano il loro funzionamento su di essa e puntano sul contenuto generato dal grande numero di esperti che contribuiscono alla creazione delle pagine *Wikipedia* o delle risposte.

Collegamenti didattici: ***Nozioni basilari di statistica (MEDIA, MEDIANA, MODA). Si veda il capitolo su "Stime" per approfondimenti.***

**Risorse esterne:**

(In inglese) https://youtu.be/n98BhnwWmsc
La saggezza della folla messa in pratica per un concorso.

(In inglese) https://www.scienceathome.org/
Questo progetto propone giochi basati su problemi aperti, ad es. di fisica quantistica, nell'intento di raccogliere dati sulle sessioni di gioco degli utenti, per portare avanti una vera ricerca scientifica.

(In inglese) https://www.zooniverse.org/

Come il precedente, ma senza la veste di gioco. Gli utenti possono contribuire in modo semplice a studi scientifici o di pubblica utilità (come evidenziare su immagini satellitari le aree danneggiate dopo il terremoto in Ecuador).

**Approfondimenti didattici**

Proporre esperienze legate ai diversi tipi di *stima*, risulta molto significativo fin dalla scuola elementare. I principali tipi di stima riguardano la *numerosità* (ossia quantità numeriche), le *misurazioni* (di grandezze sia continue sia discrete) e gli aspetti *computazionali* (riferiti ai risultati di calcoli). L'esempio delle caramelle sopra citato tratta la stima di numerosità, che concerne il riconoscimento di quantità maggiori di 5-7 elementi.

Come riportato in questo paragrafo è possibile collegare esperienze di stima a visualizzazioni di quantità tramite grafici e tabelle, altro argomento contemplato fin dalla scuola elementare.

Tali esperienze permettono di sviluppare diverse finalità:

- saper allenare l'"occhio alla stima", sia diretta che indiretta;
- prevedere l'ordine di grandezza di una quantità, una grandezza, un calcolo;
- saper accettare la presenza di un errore nella propria stima, rispetto al valore esatto;
- saper usare e coordinare tra loro varie strategie di calcolo mentale;
- saper rappresentare una quantità tramite diverse forme di rappresentazione.

Per quanto concerne la scuola elementare, alcuni spunti legati alla stima sono compresi nei materiali del progetto "MaMa–matematica per la scuola elementare". Tali materiali sono gratuitamente scaricabili a questo link: https://mama.edu.ti.ch/.

In particolare, si suggerisce di consultare:

- le *Linee guida* per avere degli approfondimenti matematici e didattici di carattere generale relativi alla stima in ambito matematico;
- le *Pratiche didattiche* "Stimiamo quanti sono", un documento ricco di spunti rivolto al primo ciclo, e "Stimiamo quantità e risultati", un documento rivolto invece al secondo ciclo, ma adatto anche per allievi più grandi.
- le *Schede didattiche* pensate per gli allievi, che è possibile trovare impostando il filtro "Stima" nel motore di ricerca dei materiali didattici. Fra le numerose schede presenti, quelle che si prestano in modo specifico per un lavoro analogo a quello presentato in questo documento sono: "Contenitori e stima", "Stima a coppie", "Frutta a colpo d'occhio", "Quante caramelle", "Allo zoo", "Stelle nel cielo", "Stime a confronto", "Quante graffette", "Quanti ceci".

Dallo stesso portale è inoltre possibile recuperare molti materiali relativi all'uso e alla lettura di grafici e tabelle. In particolare, si suggerisce di consultare:

- le *Linee guida* per avere degli approfondimenti matematici e didattici relativi all'uso e alla realizzazione di grafici e tabelle, così come qualche cenno storico sul tema;
- le *Pratiche didattiche* "Giochiamo con grafici e tabelle", un documento ricco di spunti di attività per introdurre la lettura e la realizzazione di grafici e tabelle in classe;

- le *Schede didattiche* pensate per gli allievi, che è possibile trovare impostando il filtro "Grafici e tabelle" nel motore di ricerca dei materiali didattici. Fra le numerose schede presenti, quelle che si prestano particolarmente per un lavoro analogo a quello presentato in questo documento sugli istogrammi sono le seguenti: "Grafici di classe 1", "Grafici di classe 2", "Problemi di meteo", "Registro di classe", "Tutti in vacanza", "La scelta del film", "Ricreazioni", "Sondaggio di classe", "Da tabella a grafico", "I nomi femminili", "Podio dei nomi femminili", "Età della popolazione", "Che lingue parli", "Numeri e famiglie", "La Verbanella", "Frequenza scolastica", "Ortofrutta".

Consultando la scheda didattica "Stimiamo con i sensi" nel sito "Matematicando" (matematicando.supsi.ch), adatta per gli allievi del primo ciclo della scuola elementare, è possibile avere spunti didattici per giocare sulla stima di quantità non solo attraverso la vista. Per il secondo ciclo della scuola elementare si trovano ulteriori spunti nelle schede didattiche "Stimiamoci" e "Stime in piazza". Una versione più complessa dell'ultima scheda didattica, adatta per la scuola media, è disponibile con lo stesso nome "Stime in piazza".

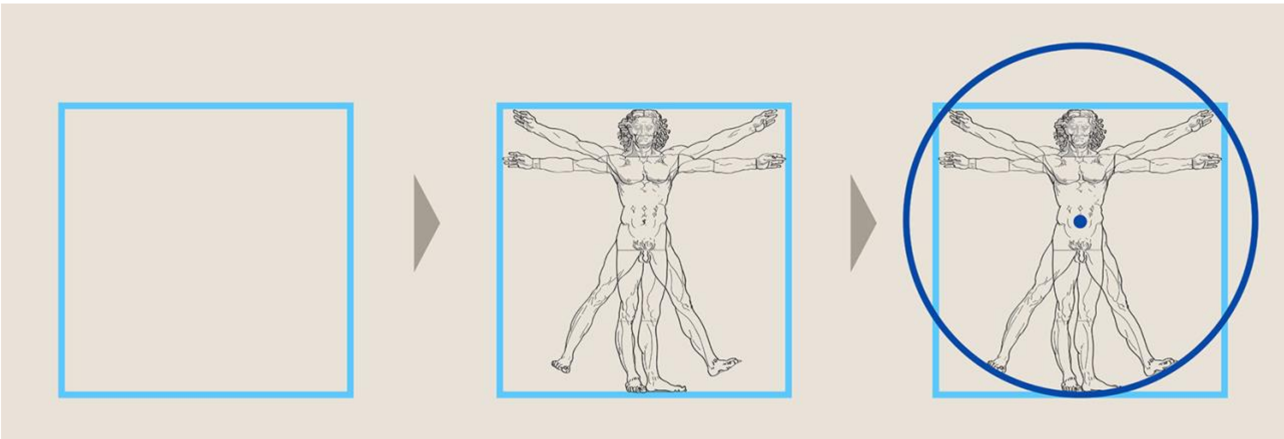
I testi riportati di seguito, adatti fin dalla scuola elementare, sono incentrati sulla visualizzazione di grandi quantità di elementi. Possono essere quindi utilizzati didatticamente mostrando agli allievi le illustrazioni e chiedendo loro di provare a effettuare una stima della quantità di elementi rappresentati, verificando poi tramite conteggio (per piccole quantità) o leggendo i numeri direttamente sulla pagina (per quantità più grandi).

- Tessaro, G. (2012). *Tanti tanti tanti*. Carthusia.
- Fromental, J. L., & Jolivet, J. (2017). *365 pinguini*. Il Castoro.
- Roskifte, K. (2019). *Tutti quanti contano*. Edizioni EL.

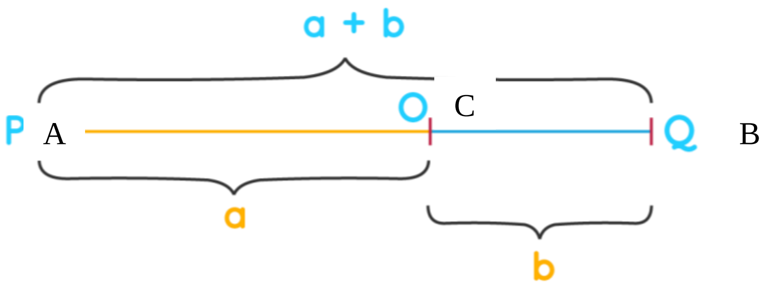
# NUMERO AUREO

**Cos'è?** L'uomo vitruviano è un disegno di Leonardo da Vinci del 1490 circa, che raffigura un uomo in due posizioni sovrapposte all'interno di un cerchio e di un quadrato. Lo scopo del disegno era rappresentare le proporzioni ideali di un corpo e dimostrare come questo possa essere inscritto nel cerchio e nel quadrato, le due figure geometriche "perfette". L'opera è così chiamata in quanto ispirata ai lavori dell'architetto e filosofo greco Marco Vitruvio Pollione che nel 15 a.C. così scrisse:

> *"Il centro del corpo umano è inoltre per natura l'ombelico; infatti, se si sdraia un uomo sul dorso, mani e piedi allargati, e si punta un compasso sul suo ombelico, si toccherà tangenzialmente, descrivendo un cerchio, l'estremità delle dita delle sue mani e dei suoi piedi*".



**Perché?** La proporzione perfetta (o sezione aurea) del corpo all'interno di un cerchio può essere rappresentata da un segmento diviso in due parti $a$ e $b$, dove $a+b$ rappresenta l'altezza totale della persona e $a$ la distanza tra suolo e ombelico, tali che il rapporto tra $a+b$ e $a$ sia uguale al rapporto tra $a$ e $b$. Da cui si ottiene che la sezione aurea è: $1{,}618033988$.
Concretamente, per avere delle proporzioni perfette, una persona alta $1.62m$ dovrà avere l'ombelico a circa $1m$ da terra.




$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1.618.... = \phi$$

Collegamenti didattici**:** ***Come si calcola $\varphi$***?

La sezione aurea del segmento AB è il segmento AC, con C compreso tra A e B, medio proporzionale tra l'intero segmento AB e la parte rimanente CB, ossia

$$AB : AC = AC : CB$$
$$AB : AC = AC : (AB - AC)$$

Indichiamo $AB = x$
e $AC = a$

$$x : a = a : (x - a)$$
$$a^2 = x \cdot (x - a)$$
$$x^2 - ax - a^2 = 0$$

Questa è una equazione di secondo grado nell'incognita $x$, che ammette due soluzioni una sola accettabile perché positiva che ha il valore:

$$x_1 = a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

A questo punto definiamo il ***rapporto aureo*** come il rapporto $\varphi = \frac{x}{a}$ cioè:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

**Che cos'ha di speciale $\varphi$**?

- Il quadrato di $\varphi$è uguale a $\varphi$aumentato di 1: $\varphi^2 = \varphi + 1$

- Il reciproco di $\varphi$è uguale a $\varphi$diminuito di 1:
  $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$

- Le proprietà che abbiamo appena esposto indicano, tra le altre cose, che il quadrato e il reciproco di $\varphi$hanno la stessa parte decimale di $\varphi$:

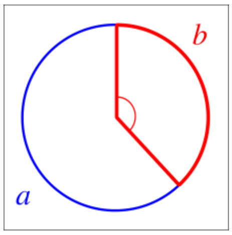
$$\varphi = 1{,}6180339887 \ldots$$

$$\varphi^2 = 2{,}6180339887 \ldots$$

$$\frac{1}{\varphi} = 0{,}6180339887 \ldots$$

Inoltre, $\varphi$ è l'unico numero per cui si verifica questa situazione (se escludiamo i numeri naturali, ovviamente).

In geometria l'**angolo aureo** è l'angolo sotteso dall'arco di circonferenza più piccolo (l'arco in rosso nella figura accanto) che si ottiene dividendo la circonferenza stessa in due archi che stanno tra loro nello stesso rapporto che si ha nella sezione aurea. Il valore di questo angolo è $137^\circ 30'$.

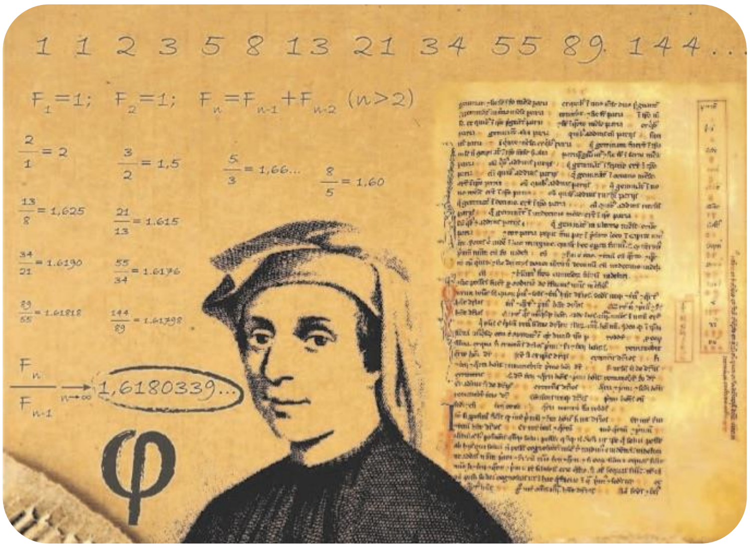



**Curiosità:** Per noi è solo una bella curiosità, ma da secoli, dietro l'idea di armonia e perfezione, troviamo il rapporto aureo. Inoltre, non ci sono prove scientifiche che quelle proporzioni siano "più belle" di altre, rimane quindi solo una questione di gusti e cultura.

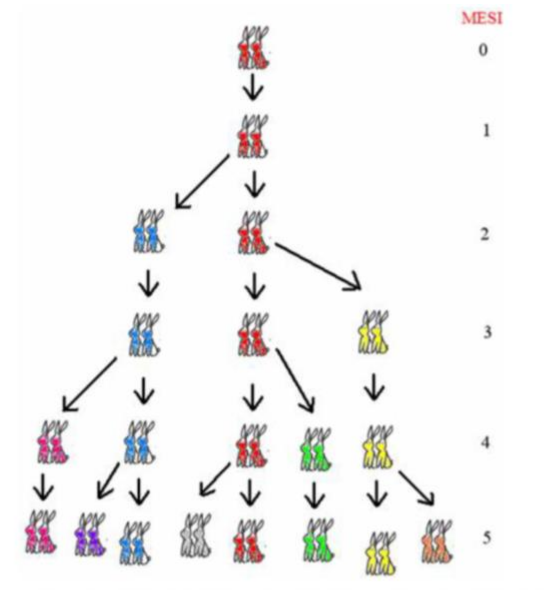
**Altre risorse esterne:**
http://wsimag.com/it/cultura/2004-le-divine-proporzioni
Articolo di Piergiorgio Oddifreddi sulle proporzioni che hanno ispirato l'arte.

# MATEMATICA E NATURA

## LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI




$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,\ 21, 34, \ldots$ Questa successione in cui ogni numero è ottenuto dalla somma dei due numeri che lo precedono, prende il nome da Leonardo Pisano detto Fibonacci (1175-1240), matematico del XIII secolo. Il padre era un mercante che aveva continui contatti con le popolazioni dell'Africa settentrionale, così Leonardo ebbe modo di viaggiare in Egitto, Siria, Grecia e di conoscere i più importanti matematici arabi e di apprendere l'algebra e il sistema di notazione indo-arabico che è arrivato sino a noi. Nel 1202 scrisse il Liber Abaci, opera che fece scoprire all'Europa il sistema di notazione indo-arabo, la numerazione decimale e lo zero – o zefr, dall' arabo zefiro – cioè numero vuoto come il "soffio di vento" che, spostando le cifre come il vento sposta le cose, ne cambia il valore pur nella sua inconsistenza.



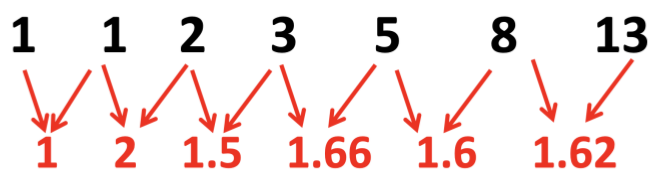

La successione di Fibonacci nacque da un problema del Liber Abaci: “*Quante coppie di conigli si ottengono in un anno, salvo i casi di morte, supponendo che ogni coppia dia alla luce un’altra coppia ogni mese e che le coppie più giovani siano in grado di riprodursi già al secondo mese di vita?*”
La risposta è la seguente: alla fine del primo mese si ha la prima coppia; alla fine del secondo mese si ha la coppia originale e una nuova coppia da questa generata; alla fine del terzo mese si aggiunge una terza coppia; alla fine del quarto mese si hanno 5 coppie, perché anche la seconda coppia ha incominciato a generare e così via:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711 \ldots$
La successione di Fibonacci possiede molte proprietà eleganti e significative. Vediamone alcune:

- Due numeri di Fibonacci consecutivi non hanno fattori comuni, sono cioè primi tra loro (coprimi), in altre parole il loro massimo comun divisore è uguale a 1.
- Un qualsiasi numero della successione elevato al quadrato è uguale al prodotto tra il numero che lo precede e quello che lo segue, aumentato o diminuito di un’unità.

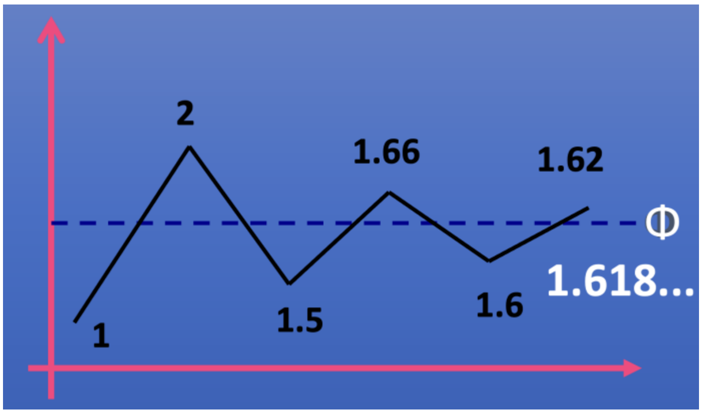
Per esempio $21^2 = 441 = 13 \times 34 - 1$
mentre $89^2 = 7921 = 55 \times 144 + 1$

- La successione formata dai rapporti fra due termini consecutivi della successione di Fibonacci è una successione i cui primi termini sono:



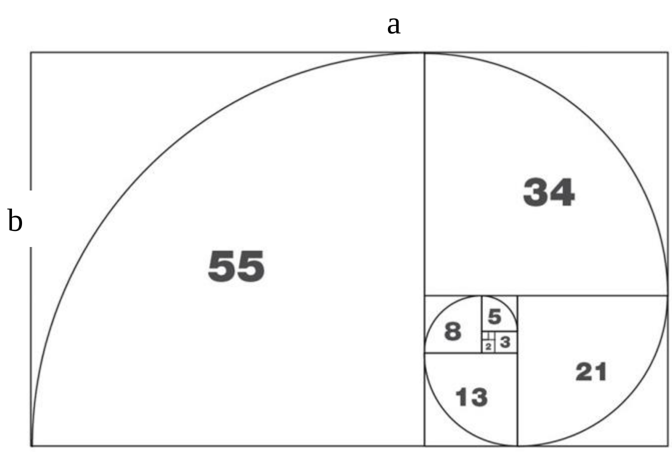

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{13}{8}$ | $\frac{21}{13}$ | $\frac{34}{21}$ | $\frac{55}{34}$ | $\frac{89}{55}$ | $\frac{144}{89}$ | …. |
| 1 | 2 | 1,5 | 1,666 | 1,6 | 1,625 | 1,615 | 1,619 | 1,617 | 1,61818 | 1,6179 | … |

Il limite di questa successione è Il “numero aureo” o “rapporto aureo”; era conosciuto fin dall’antichità per le sue curiose caratteristiche e viene indicato con la lettera greca ϕ (phi) in onore di Fibonacci. È un numero irrazionale: le sue cifre decimali continuano all’infinito senza un apparente schema! Il “rapporto aureo” fu chiamato da Leonardo da Vinci “divina proporzione”.




## Spirali e numeri di Fibonacci

I numeri della famosa successione di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 possono essere usati per tracciare opportuni quadrati come in figura: questo insieme di rettangoli, i cui lati hanno lunghezze pari a numeri di Fibonacci successivi e che sono composti da quadrati con lati che sono numeri di Fibonacci, sono chiamati rettangoli di Fibonacci. Tracciando in ogni quadrato un quarto di circonferenza si ottiene la spirale di Fibonacci, che approssima molto bene la spirale detta *aurea*: una particolare spirale logaritmica che si accresce del numero aureo φ ad ogni quarto di giro.

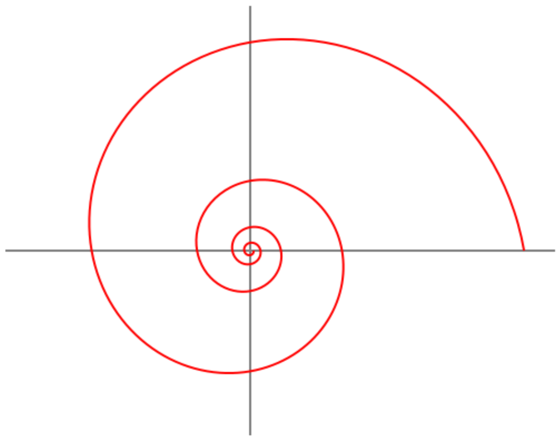


$$\frac{a}{b} = \varphi = 1{,}618$$

Le spirali però non sono tutte uguali: a seconda della legge scelta si possono avere spirali di Archimede, spirali di Galileo, spirali di Fermat, spirali logaritmiche, spirali iperboliche e diverse altre. Come tracciare matematicamente una spirale? Disegnando con una matita a partire da un punto centrale, basta muoverla di una distanza *r* e ruotare allo stesso tempo di un angolo $\theta$, seguendo una regola che modifica *r* al cambiare di $\theta$. Alcuni parametri (*a*, *b*) contribuiscono a deformare la spirale anche se la regola rimane sempre la stessa.

spirale logaritmica ($r = ab\theta$) spirale di Fermat ($r = a\sqrt{\theta}$ )

spirale iperbolica ($r = a/\theta$) spirale di Archimede ($r = a + b\theta$)



*Spirale logaritmica*

Sembra che la spirale logaritmica faccia da modello, anche se sempre in modo approssimato, per moltissime strutture naturali. È una forma che ispira da secoli anche l'immaginazione di artisti e scienziati per le sue proprietà estetiche e matematiche tanto che Bernoulli la chiamò *spira mirabilis* e ne volle una incisa sulla sua lapide – purtroppo lo scultore ne realizzò invece una di Archimede!

La spirale è una delle più affascinanti strutture che ricorrono nell'universo.

# I NUMERI DI FIBONACCI IN NATURA

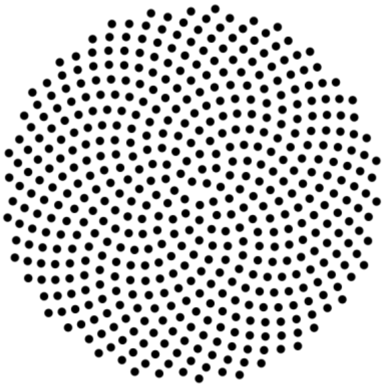
Una delle particolarità di numeri di Fibonacci è che spesso si ritrovano in natura.

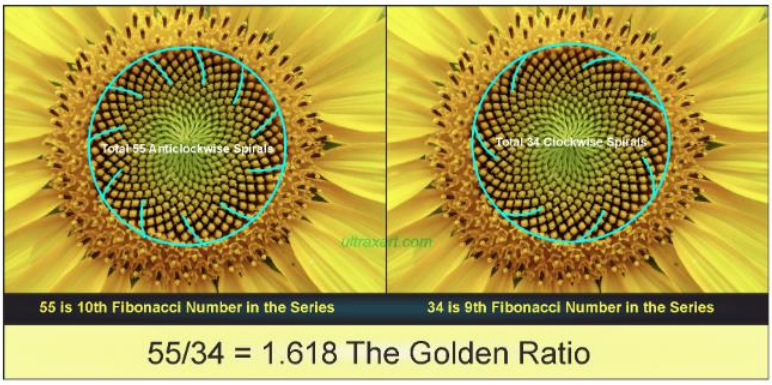
Ciò che rende questa connessione interessante è che seguendo la sequenza di Fibonacci, i fiori possono massimizzare lo spazio e l'efficacia della loro esposizione alla luce solare e agli insetti impollinatori. Una disposizione di petali o semi che segue questa sequenza permette ai fiori di avere un posizionamento ottimale per catturare la luce e gli insetti da diverse angolazioni. Per le piante, portare più semi è vantaggioso perché aumenta le probabilità della specie di riprodursi.

Tuttavia, è importante notare che questa regola non si applica a tutti i fiori, poiché ci sono molti fattori che influenzano il numero di petali, tra cui la genetica, l'ambiente e altre variabili.

Ad esempio:

- Nei **girasoli** il disco centrale (il capolino) porta una moltitudine di primordi che, maturando, diventeranno fiorellini e poi semi. Ma come si dispongono tutti questi primordi in così poco spazio? Il primo (detto apice) nasce al centro, i successivi nascono ciascuno ruotato di un certo angolo (angolo aureo di $137^\circ 30'$associato al numero aureo) rispetto al precedente. I semi si dispongono seguendo una struttura a spirale. Queste spirali sono legate ai numeri di Fibonacci, Inoltre, la proporzione dei semi disposti in queste spirali segue il rapporto aureo ϕ. Questo significa che il numero di spirali in senso orario è spesso un numero di Fibonacci, mentre il numero di spirali in senso antiorario è spesso il numero di Fibonacci successivo.





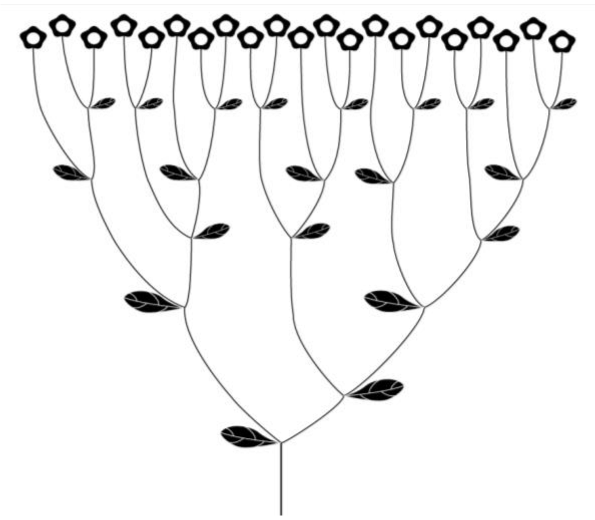

- Le **margherite** sono spesso citate come esempio di fiori con petali che seguono la sequenza di Fibonacci. Sono noti per avere 21 o 34 petali.

- I **giacinti** sono fiori a bulbo con una disposizione di 3, 5 o 8 petali.
- I **gigli** possono avere una disposizione dei petali che si avvicina alla sequenza di Fibonacci, con 3, 5 o 8 petali.
- Le **calendule** sono fiori spesso con 21 o 34 petali.
- Il fiore del **ranuncolo** può avere 5, 8 o 13 petali.
- La Achillea Ptarmica (detta anche **sternutella**) è una pianta che fiorisce in estate producendo tanti fiorellini bianchi, uno per ramo. Come accade spesso in natura la sua crescita sembra seguire un preciso schema: un ramo ne genera uno nuovo che dopo un mese sarà in grado di produrne un altro e così via. Quanti saranno i rami e quindi i fiorellini che compaiono dopo un anno? Un semplice schema matematico può aiutare a risolvere questo problema.

  Il primo passo consiste nel disegnare uno schema semplificato della pianta con le ramificazioni mese per mese, tenendo presente che un nuovo ramo sarà in grado di sdoppiarsi solo dopo un mese. Il numero di rami aumenta velocemente e lo schema diventa presto intricato. Per capire cosa succede dopo dodici mesi, si può notare che in questo schema c'è una regola. Il numero di rami che nascono ogni mese infatti, è la somma dei rami nei due mesi precedenti:

$$21 = 13 + 8,\ \ 13 = 8 + 5,\ \ 8 = 5 + 3,\ \ 3 = 2 + 1$$

  Il conto dei rami fa emergere la successione di Fibonacci.



- Le spirali si possono osservare anche in altre **piante** come cavolfiori, pigne, cactus.
- Conchiglie di Nautilus, code di camaleonte, galassie, foglie arrotolate, gusci di chiocciola, petali di rosa... in natura si incontrano spesso forme a spirale.




– La coclea – dal latino *cochlea*, chiocciola – è una struttura che abbiamo nel nostro orecchio interno assomiglia ad una spirale. La coclea di destra presenta un avvolgimento in senso antiorario, mentre quella di sinistra in senso orario.

Collegamenti didattici: ***Numeri irrazionali***.

È notevole che molti numeri fra i più importanti in matematica siano irrazionali ($\pi$, e, φ) cioè numeri con infinite cifre decimali che continuano senza ripetersi. Sulle loro proprietà si può dire molto, qui basta precisare che la definizione di φ come "il più irrazionale degli irrazionali" deriva dalla difficoltà di approssimarlo con *frazioni continue*. Si tratta di una rappresentazione alternativa a quella decimale, più efficace per fare approssimazioni di qualsiasi numero reale con numeri razionali, che ha questo aspetto:

$$numero = \ a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots\dots}}}$$

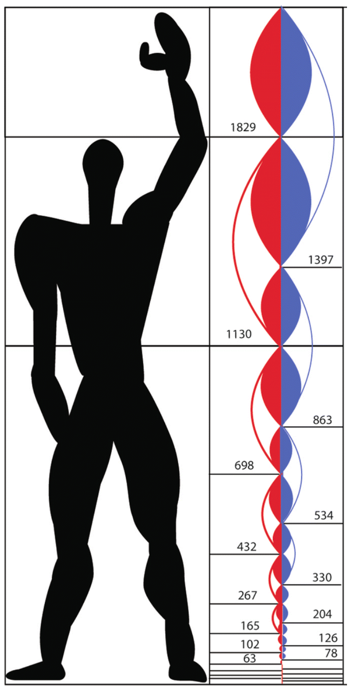
Dove $a_{0,1,2,3,\dots}$ sono tutti interi. Più si espande la frazione, più migliora la precisione dell'approssimazione, come se si usasse un righello più fine per rappresentare il numero.
Ogni numero reale, quindi anche irrazionale, può essere rappresentato in questo modo, ad esempio:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{\dots\dots}}} \qquad \text{mentre} \qquad \varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots\dots}}}$$

La presenza di 1 ovunque nella rappresentazione di φ fa crescere molto lentamente la precisione e questo lo rende il peggiore da approssimare con numeri razionali.

**Altre risorse esterne:**
https://it.wikipedia.org/wiki/Frazione_continua
Frazioni continue su Wikipedia.
(In inglese) http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/
Una vera miniera di informazioni sul numero aureo e altre curiosità matematiche.

Collegamenti didattici: ***Matematica e arte**.*




Nel passato si è pensato che la sezione aurea avesse ispirato numerosi architetti dell'antichità e in particolari i costruttori di Partenone e Piramidi, in quanto parte di questi edifici corrispondono al rapporto espresso da questa proporzione. In verità non vi sono prove che la sezione aurea sia mai stata utilizzata di proposito nella costruzione di questi monumenti.
Più vicino ai giorni nostri, l'architetto svizzero Le Corbusier (1887-1965), basò parte della sua opera architettonica sulla serie di Fibonacci e sulla sezione aurea; creò anche un sistema di scala architettonica chiamato"Modulor". Il termine "Modulor" è una combinazione delle parole "module" (modulo) e "d'or" (d'oro), che richiama il concetto di proporzione aurea (numero aureo) nella matematica. L'obiettivo di Le Corbusier era quello di creare una scala di misure basata sulle proporzioni umane e sul concetto di armonia matematica.Questo sistema è stato utilizzato per guidare le decisioni di progettazione, come altezze dei pavimenti, altezze dei mobili, rapporti delle finestre e altro ancora. La teoria era che seguendo il Modulor, si otterrebbero spazi architettonici e design che sono piacevoli e armoniosi percepiti dalla persona che li utilizza.Il Modulor è stato applicato in vari progetti architettonici di Le Corbusier, come il "Modulor 1" e il "Modulor 2", e ha avuto un impatto significativo sul design architettonico e sulla teoria del design.

Collegamenti didattici: ***Matematica e teoria musicale.***

Un'invenzione straordinaria come la successione di Fibonacci trova ampio riscontro in discipline diverse dalla matematica, tra cui anche la musica, dove si esprime come pura natura melodica. Si assegni ad ogni numero una nota musicale: DO = 1, RE = 2, etc. e si consideri scala diatonica di 7 note: DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI. Utilizzando l'operazione di *modulo* è possibile adeguare le sette note naturali all'infinita successione di numeri. Con questa operazione, ogni numero diventa il resto della sua divisione per 7.

Ad es. $15 = 2 \times 7 + \mathbf{1}$, perciò 15 = **1** (*mod*7).

Se si effettua l'operazione sul numero *n*-esimo *mod* 7 si ottengono i risultati contenuti nella tabella che segue dove è riportata la successione di Fibonacci nella prima colonna e il corrispondente numero *mod* 7 nella seconda.

| N. succ. | N. mod 7 | N. succ. | N. mod 7 | N. succ. | N. mod 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 17.711 | 1 | 433.494.437 | 5 |
| 1 | 1 | 28.657 | 6 | 701.408.733 | 4 |
| 2 | 2 | 46.368 | 0 | 1.134.903.170 | 2 |
| 3 | 3 | 75.025 | 6 | 1.836.311.903 | 6 |
| 5 | 5 | 121.393 | 6 | 2.971.215.073 | 1 |
| 8 | 1 | 196.418 | 5 | 4.807.526.976 | 0 |
| 13 | 6 | 317.811 | 4 | 7.778.742.049 | 1 |
| 21 | 0 | 514.229 | 2 | 12.586.269.025 | 1 |
| 34 | 6 | 832.040 | 6 | 20.365.011.074 | 2 |
| 55 | 6 | 1.346.269 | 1 | 32.951.280.099 | 3 |
| 89 | 5 | 2.178.309 | 0 | 53.316.291.173 | 5 |
| 144 | 4 | 3.524.578 | 1 | 86.267.571.272 | 1 |
| 233 | 2 | 5.702.887 | 1 | 139.583.862.445 | 6 |
| 377 | 6 | 9.227.465 | 2 | 225.851.433.717 | 0 |
| 610 | 1 | 14.930.352 | 3 | 365.435.296.162 | 6 |
| 987 | 0 | 24.157.817 | 5 | 591.286.729.879 | 6 |
| 1.597 | 1 | 39.088.169 | 1 | 956.722.026.041 | 5 |
| 2.584 | 1 | 63.245.986 | 6 | 1.548.008.755.920 | 4 |
| 4.181 | 2 | 102.334.155 | 0 | 2.504.730.781.961 | 2 |
| 6.765 | 3 | 165.580.141 | 6 | 4.052.739.537.881 | 6 |
| 10.946 | 5 | 267.914.296 | 6 | 6.557.470.319.842 | 1 |

Si ottiene così una sequenza di numeri che variano tra 0 e 6 e che, quindi, possono essere semplicemente trasformati nelle sette note musicali come segue:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| DO | RE | MI | FA | SOL | LA | SI |

Sulla base di questa operazione è possibile costruire alcuni accordi che risuonano in modo armonico con la spirale nel nostro orecchio e richiamano un'esperienza piacevole, comprendendo note la cui posizione nella scala musicale è associata ai numeri di Fibonacci, ad es. 3-5-8. Per quei numeri non direttamente associati alla scala diatonica, si procede come segue. I numeri della successione dopo l'operazione di modulo sono dati da:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 1 | 6 | 0 | 6 | 6 | 5 | 4 | 2 | 6 | 1 | 0 |
| DO | DO | RE | MI | SOL | DO | LA | SI | LA | LA | SOL | FA | RE | LA | DO | SI |

Sostituendo ricorsivamente, si vede che la sequenza musicale si ripete identica ogni sedici note. Si ottiene dunque una melodia che si può suonare in una sola ottava, evitando di toccare quelle note che salendo vorticosamente non risulterebbero più percettibili o comprensibili.

**Altre risorse esterne:**
https://emercurius.wordpress.com/2011/09/12/fra-numeri-e-musica-2/
Approfondimento informale sulla "musica" della sequenza di Fibonacci, da cui è possibile anche ascoltarla.

**Approfondimenti didattici**
Le successioni, in particolare la nota successione di Fibonacci, vengono proposte fin dalla scuola elementare con l'intento di sviluppare le seguenti finalità:
- approcciarsi all'idea di ricorsività;
- conoscere un noto matematico della storia, così da rendere la matematica più "umana";
- collegare la matematica ad altri ambiti disciplinari;
- collegare la matematica a contesti reali.

Il numero φ o *numero aureo*, invece, non rientra nel programma della scuola elementare, ma può essere in ogni caso presentato in questo livello scolastico in modo intuitivo, inserendolo in vari contesti, per poi approfondirlo successivamente dal punto di vista matematico alla scuola media e superiore.
Proporre il *numero aureo* nella formazione delle allieve e degli allievi, oltre a sviluppare le finalità già proposte nel paragrafo "I numeri notevoli", consente nello specifico di:
- approfondire le caratteristiche matematiche di un particolare tipo di numero;
- trovare connessioni tra la matematica e altre aree culturali;
- cogliere la matematica in contesti reali.

Per quanto concerne la scuola elementare, alcuni spunti legati alle successioni (alcuni relativi alla successione di Fibonacci) sono compresi nei materiali del progetto "MaMa–matematica per la

scuola elementare". Tali materiali sono gratuitamente scaricabili a questo link: https://mama.edu.ti.ch/.
In particolare, si suggerisce di consultare:
- le *Linee guida* per avere degli approfondimenti matematici e didattici di carattere generale relativi al tema delle successioni;
- le *Pratiche didattiche "Alla scoperta delle successioni"*, un documento ricco di spunti rivolto al primo ciclo, e "Aguzziamo l'ingegno con le successioni", documento rivolto invece al secondo ciclo, ma adatto anche per allievi più grandi.
- le *Schede didattiche* pensate per gli allievi, che è possibile trovare impostando il filtro "Successioni" nel motore di ricerca dei materiali didattici. Fra le numerose schede presenti, quella che si presta in modo esplicito per proporre il problema dei conigli, e scoprire così la successione di Fibonacci, si chiama "Il problema dei conigli".

Dallo stesso portale è inoltre possibile recuperare alcuni materiali relativi ai collegamenti interdisciplinari fra matematica e arte e matematica e natura. In particolare, si suggerisce di consultare:
- i *Contesti di senso* "I numeri personali" e "Matematica e arte", in cui vengono proposti spunti di situazioni motivanti in cui è implicato il *numero aureo* e la proporzionalità nel corpo umano e in contesti artistici;
- le *Pratiche didattiche* "Matematica e arte nel primo ciclo" e "Matematica e arte nel secondo ciclo", in cui sono raccolte, fra le altre, anche proposte didattiche legate al *numero aureo* e alle proporzioni divine nelle opere d'arte.

Fra le pubblicazioni esterne alla piattaforma MaMa consigliamo il quaderno didattico "In arte... Matematica!" della collana *Praticamente* in cui è raccontata un'esperienza didattica vissuta alla scuola elementare relativa alla scoperta della successione di Fibonacci, del numero aureo e delle sue applicazioni nel mondo dell'arte.

Un fumetto di Leonardo Pisano, detto Fibonacci, è rintracciabile nella raccolta "Matematici a fumetti", sotto la voce Fibonacci (XIII sec.), dove viene proposta in modo divertente anche la sua celebre successione adatta per la scuola elementare e media.

Per approfondire la successione di Fibonacci è possibile visionare il divertente video "La successione di Fibonacci" della serie "Matematicando Ciak!", che consiste in una raccolta di video per uso didattico rivolti alla scuola elementare e medie.

"Una figura aurea" è il titolo di una storia, di una filastrocca e di una canzone pensati per la scuola elementare legate al progetto "Un mondo figure". Progetto curato dal Centro didattica della matematica del Dipartimento formazione apprendimento / Alta scuola pedagogica della SUPSI di Locarno insieme alla RSI KIDS.

Su questo tema va anche ricordato il classico cortometraggio Disney "Paperino nel mondo della matemagica" del 1959. Fra i vari contenuti presenti, alcuni sono relativi ai collegamenti fra numero aureo, arte e natura. Per approfondire le tematiche trattate nel film, è possibile scaricare dal sito "Matematicando" le schede didattiche "La matemagica di Paperino" per i bambini di 6-10 anni e "La matemagica di Paperino" per ragazzi di 11-14 anni.

La raccolta “Matematica e natura”, realizzato da docenti di scuola elementare del territorio ticinese, presenta infine numerosi spunti didattici che fanno leva sui collegamenti interdisciplinari fra matematica e natura e presto disponibile online sulla piattaforma “Matematicando”.

I testi riportati di seguito, adatti per gli ultimi anni di scuola elementare e per la scuola media, possono essere utilizzati a fini didattici per trattare in classe il tema della successione di Fibonacci e del numero aureo:
- Cerasoli, A. (2010). *Io conto*. Feltrinelli Kids.
- Cerasoli, A. (2011). *I magnifici dieci*. Editoriale Scienza.
- Enzensberger, H. (1997). *Il mago dei numeri*. Einaudi Ragazzi.
- Feniello, A. (2014). *Il bambino che inventò lo zero*. Editori Laterza.

Inoltre, un interessante fumetto adatto anche per i più grandi è il seguente:
Flandoli, C. (2020). *Il libro di Leonardo*. Comics&Science.

Per un approfondimento rivolto agli adulti, si consigliano i seguenti riferimenti:
- AA.VV. (2012). *La sezione aurea*. RBA.
- D’Amore, B. (2007). *Matematica dappertutto*. Pitagora.
- D’Amore, B. (2015). *Arte e matematica*. Edizioni Dedalo.
- D’Amore B., & Sbaragli S. (2017). *La matematica e la sua storia: dalle origini al Medioevo.* Edizioni Dedalo.
- Livio, M. (2005). *La sezione aurea*. Rizzoli.
- Maor, E. & Jost, E. (2017). *L’arte della geometria*. Codice Edizioni.

# QUADRATO MAGICO

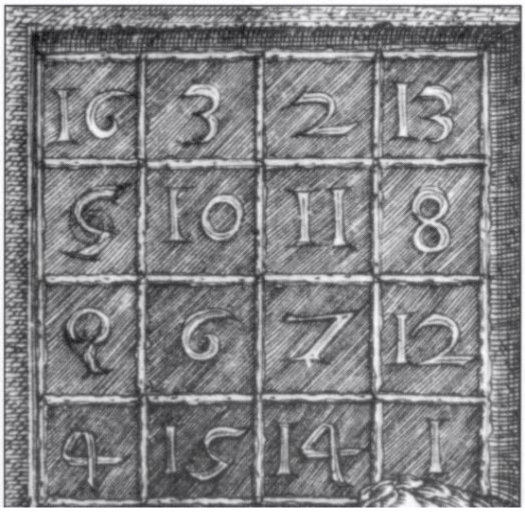
**Cos'è?** Un quadrato magico è una tabella quadrata di numeri interi positivi (1,2,3,4,5,6, ecc.) costruita in modo che la somma dei numeri su ogni riga, su ogni colonna e in entrambe le diagonali dia sempre lo stesso numero chiamato *costante magica*. Il numero delle colonne o delle righe è detto *ordine* del quadrato.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 7 | 6 | → 15 |
| | 9 | 5 | 1 | → 15 |
| | 4 | 3 | 8 | → 15 |
| ↙ 15 | ↓ 15 | ↓ 15 | ↓ 15 | ↘ 15 |

**Perché?**L'uomo è da sempre attratto dai giochi matematici e dagli enigmi che questi implicano. Il quadrato magico, oltre che come rompicapo, è infatti adoperato da varie civiltà – arabi e greci soprattutto – in alcune applicazioni della matematica, come il calcolo combinatorio, in particolare per scoprire il numero totale di combinazioni possibili a seconda dell'ordine.

**Curiosità:** Un'antica leggenda cinese che risale al 2000 a.C. circa narra di un pescatore che trovò lungo le rive del fiume Lo una tartaruga con strani segni geometrici sul guscio. I matematici dell'imperatore scoprirono che si trattava di un quadrato di numeri con somma costante 15 su ogni riga, colonna e diagonale. Lo Shu, così fu chiamato, diventò uno dei simboli sacri della Cina.

Uno dei quadrati magici più famosi è di Albrecht Dürer (pittore e geometra, 1471-1528) e appare nella sua incisione intitolata *Melancholia I*. Esso fu probabilmente il primo a comparire nell'arte europea e la sua costante magica è 34. La costante è valida anche quando si sommano individualmente i quattro tasselli dei quattro angoli, i quattro tasselli centrali, quelli dei quattro quadranti e diverse altre combinazioni. Inoltre, compare il numero 1514 (data dell'opera) e il 34 (età di Dürer quando realizzò l'opera).




**Collegamenti didattici:*Calcolo combinatorio*.**

Il quadrato magico è un particolare esempio di *quadrato latino*, "scacchiera quadrata di lato *n* con un simbolo su ogni casella, in modo che ognuno di essi compaia una e una sola volta in ogni riga e in ogni colonna". Un altro esempio di quadrato magico è il famoso il Sudoku.

**QUADRATO MAGICO DI ORDINE 3 $\rightarrow \boldsymbol{n = 9}$**

Una procedura per comporre il quadrato magico $3 \times 3$ (con numeri da 1 a 9) è la seguente:

1. Disporre sulla griglia i numeri in ordine crescente partendo dalla casella in alto a sinistra.
2. Spostare di una casella i numeri, facendoli ruotare in senso orario attorno al 5 che si trova nella casella centrale.
3. Scambiare di posto i numeri agli estremi di ciascuna delle diagonali, cioè il 4 con il 6 e il 2 con l'8.


La somma di tutti i numeri del quadrato è:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

In termini più generali, la somma di n numeri consecutivi è data da $[(n + 1) \times n]/2$ .

In questo caso $n = 9$ perciò, applicando la formula precedente, si ottiene proprio che $45 = (10 \times 9)/2$.
Infatti, prendendo i due numeri nella cornice più esterna agli estremi e via via quelli più interni, si ottiene sempre lo stesso valore, cioè $10$, infatti sommando le quattro coppie di numeri $1 + 9, 2 + 8, 3 + 7$ e $4 + 6$ a cui si somma $5$, il numero centrale ed unico numero rimasto spaiato.
Una volta nota la somma dei numeri e volendoli disporre su tre righe (o colonne) in modo che la somma si ciascuna riga sia la stessa, è immediato dedurre che la somma costante (detta *costante magica*) deve essere $45/3 = 15$.

In generale, la somma costante per un quadrato di ordine $n$ è pari a $\mathrm{n} \times (\mathrm{n}^2 + 1)/2$, formula ricavabile sapendo che in un quadrato di ordine $n$ vanno posti i numeri da $1\mathrm{ad}n^2$, che sommano quindi a $\mathrm{n}^2(\mathrm{n}^2 + 1)/2$ e dividendo poi tale somma per l'ordine del quadrato (ovvero per n).

Esiste poi una regola che dice che la somma costante in un quadrato magico di ordine dispari si ottiene moltiplicando il numero al centro per la dimensione del quadrato. Nel nostro caso il quadrato ha dimensione 3 quindi, conoscendo la somma (15), possiamo ricavare che il numero al centro deve essere 5 ($15/3 = 5$).
Noto il numero da porre al centro del quadrato è tutto molto più semplice.
Chiedersi quanti quadrati magici di ordine 3 o superiore ci siano è un problema di calcolo combinatorio. La risposta però non è immediata e fu per la prima volta calcolata da Bernard Frénicle de Bessy (1605-1665), matematico francese amico di Cartesio che, nel 1663 calcolò:

- Il numero dei quadrati magici di <u>ordine 3</u> è 8, con somma costante 15, su righe, colonne e diagonali.
- Il numero dei quadrati magici di <u>ordine 4</u> è 880, con somma costante 34, su righe, colonne e diagonali.
- Solo grazie al computer si riuscì ad estendere il risultato, nel 1973, agli ordini superiori: i quadrati magici di <u>ordine 5</u> sono 275'305'224.
- Non è noto il numero preciso dei quadrati magici di <u>ordine 6</u>, anche se molti matematici si sono impegnati nella sua determinazione. Secondo alcune indagini, il loro numero è nell'ordine di $1.7754 \times 10^9$.
- Resta comunque insoluto il problema più generale di trovare la regola che permetta di determinare il numero di quadrati magici di ordine n. Questo conferma che non è facile trovare una regola matematica per tutti i problemi di tipo quantitativo che ci si pone!

**Altre risorse esterne:**
(In inglese)https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square
Esaustiva pagina di Wikipedia dedicata ai quadrati magici.

# TORRE DI HANOI

**Cos'è?** È un rompicapo che si gioca con tre paletti e un numero variabile di dischi. Le regole sono semplici:

- si deve spostare tutta la torre da un paletto ad un altro, un disco alla volta;
- un disco grande non può coprire un disco più piccolo.

Nella versione della mostra, i paletti sono disposti a triangolo invece che in fila (versione classica) e si può giocare con 8 dischi al massimo.

**Perché?** Questo rompicapo è di comprensione immediata, si risolve in fretta con pochi dischi (il consiglio è di partire con 3dischi), ma si complica parecchio all'aumentare dei dischi: il numero di spostamenti necessari a risolverlo aumenta molto rapidamente. Il numero minimo di mosse, errori esclusi, è perfettamente prevedibile: se $n$ è il numero di dischi con cui si gioca, serviranno almeno $2^n - 1$ mosse per risolverlo.

Ad esempio:

- Con 1 disco, saranno necessarie $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ mossa.
- Con 2 dischi, saranno necessarie $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ mosse.
- Con 3 dischi, saranno necessarie $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ mosse.

  E così via.

Detto in altre parole, ogni volta che si aggiunge un piano, servono il doppio delle mosse più una. Questa seconda relazione è più evidente della prima mentre si gioca: ogni volta che si aggiunge un disco (sotto agli altri) si dovranno prima ripetere le stesse operazioni del turno precedente per liberarlo, poi spostare il disco aggiunto, quindi ripetere le mosse al contrario per coprirlo.

**Curiosità:** Questo gioco ha un sapore antico, ma è stato inventato nel 1883 dal matematico Edouard Lucas, così come la storia che ne accompagnava la versione giocattolo: "*All'inizio dei tempi, Brahma portò nel grande tempio di Benares tre colonnine di diamante e 64 dischi d'oro, collocati su una di queste colonnine in ordine decrescente. È la sacra Torre di Brahma che vede impegnati, giorno e notte, i sacerdoti del tempio nel trasferimento della torre di dischi dalla prima alla terza colonnina. Essi non devono contravvenire alle regole imposte da Brahma, che richiedono di spostare soltanto un disco alla volta e che non ci sia mai un disco sopra uno più piccolo. Quando i sacerdoti avranno completato il loro lavoro e tutti i dischi saranno riordinati sulla terza colonnina sarà la fine del mondo.*"

Questo avverrebbe - è matematico - fra ben $2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$ mosse. Fossero una al secondo (senza errori!) si tratterebbe di più di 5 miliardi di secoli.

Collegamenti didattici:***Esponenziali***.

Nascoste nella soluzione del gioco ci sono le ben note potenze di 2, che richiamano fra l'altro la notazione binaria dei numeri (esiste infatti una interpretazione del gioco in questa chiave, v. link di seguito).

Collegamenti didattici: ***Successioni matematiche***.

Per dimostrare (per *induzione*) che il numero minimo di mosse per risolvere il gioco con $n$ piani è $2^n - 1$ si usa un risultato della teoria delle successioni: $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1}$.

Collegamenti didattici: ***Programmazione*.**

La disposizione a triangolo della torre di Hanoi mette in evidenza anche l'*algoritmo* di mosse che si può trovare come soluzione (in estrema sintesi: i dischi pari muovono sempre in una direzione, quelli dispari al contrario). Seguendo questa procedura, un computer può risolvere il problema senza conoscere le regole del gioco, mentre un umano potrebbe spostare correttamente la torre mentre pensa alla lista della spesa, fischiettando.

**Altre risorse esterne:**
(In inglese) https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi
Esaustiva pagina di Wikipedia sul gioco.

# STRATEGIE OTTIME – LE RANE SALTERELLE

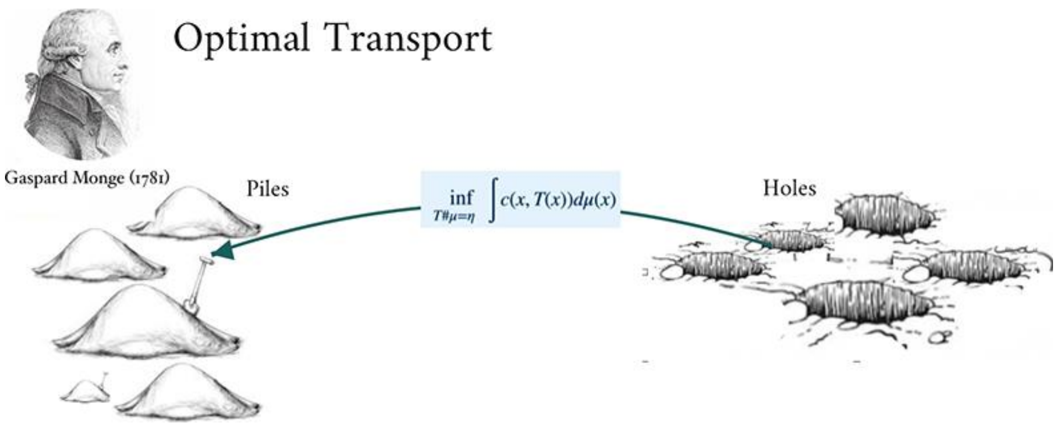
Il materiale per questa sezione su strategie ottime è una rielaborazione a partire da materiale didattico condiviso dal collega prof. Sumeetpal Singh (School of Mathematics and Applied Statistics, University of Wollongong, Australia) che ha ricevuto un sostegno finanziario dalla TIBRA Foundation.

Questa sezione aiuta a pensare come un matematico o uno statistico o, ancora più in generale, come uno scienziato dei dati ovvero a seguire un processo di apprendimento che comprende le seguenti fasi: Familiarizzare, visualizzare, generalizzare, verificare. La sezione è organizzata secondo questi punti:

1 Introduzione
2 La sfida
3 Disimballare il problema
4 Compito1
5 Compito2
6 Compito3
7 Compito4
8 Riassunto

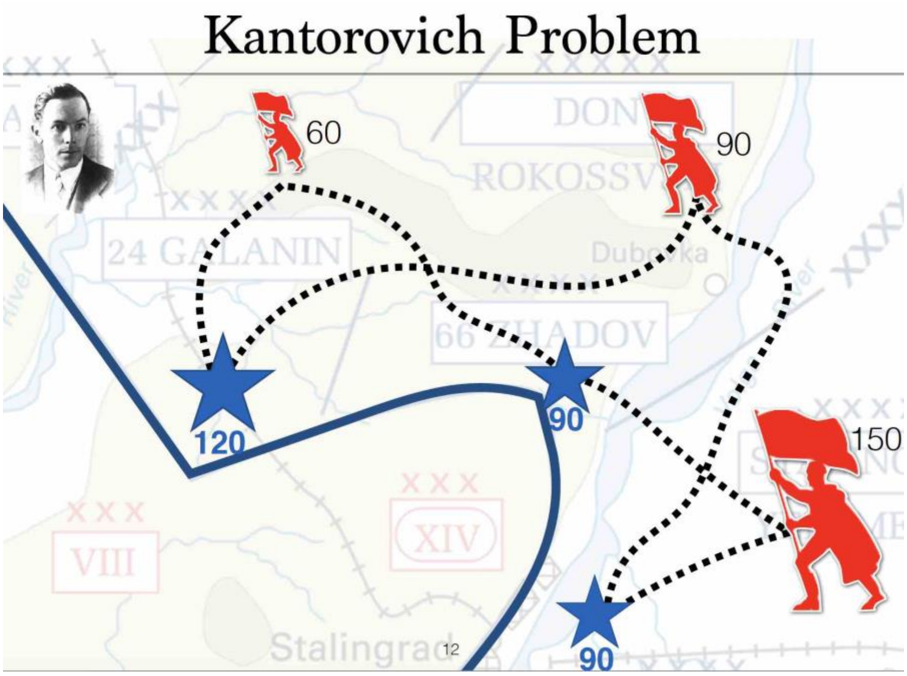
Iniziamo con una domanda: cosa fanno i matematici nel loro lavoro quotidiano?
I matematici risolvono problemi reali! I matematici trovano le strategie migliori.
Iniziamo con un problema antico che è ancora molto attuale.

**Problema**: Trova la strategia per spostare la terra con il minimo sforzo dai cumuli per riempire le buche. Si tratta di un problema detto di "trasporto ottimo". La Fields Medal2018 – equivalente del Premio Nobel per la Matematica - il prof. Alessio Figalli è stato premiato soprattutto con riferimento alla teoria che ha sviluppato su questo tema.

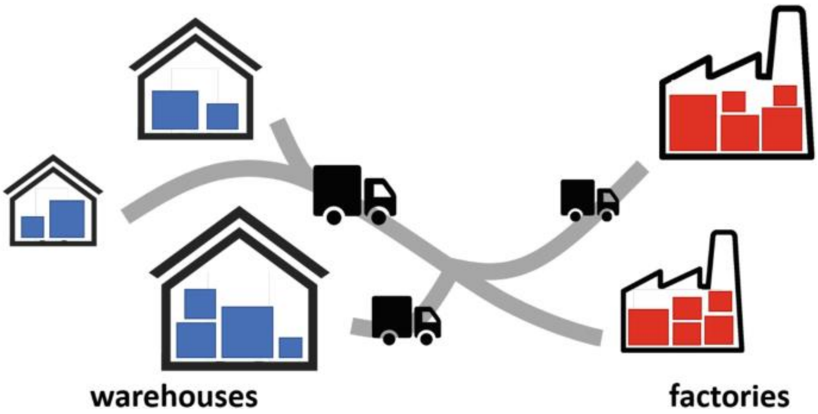



Riuscite a pensare a una versione attuale di questo problema?

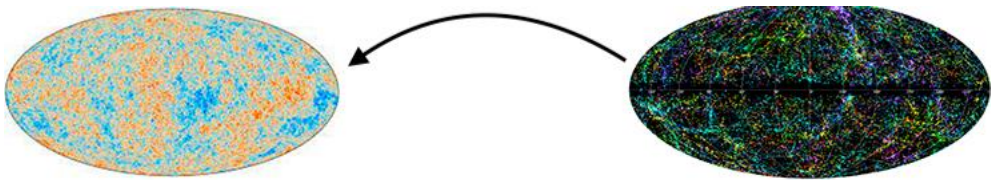
Ecco alcuni altri esempi.
Spostamento delle truppe dalle caserme ai posti di combattimento.




Spostamento di materiale dai magazzini alle fabbriche.




Ricostruzione al computer di come la terra si è evoluta fino ai giorni nostri.



Crediti per le 3 immagini sopra: M Cuturi& J. Solomon; https://arxiv.org/pdf/2008.02995.pdf ESA and the Planck Collaboration,T.H. Jarrett & RoyaMohayaee.

**La vostra sfida**: Risolvere una "versione per studenti" del problema di Trasporto Ottimale.

**Obiettivo**: Scambia la posizione delle rane nel minor numero di mosse! Le rane blu da destra devono spostarsi a sinistra e le rane rosse che in partenza si trovano a sinistra devono essere spostate a destra.

Punto di partenza: Figura 1

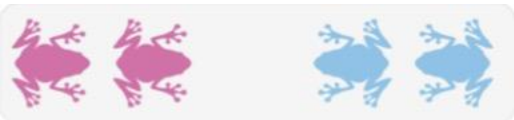


Fig. 1

**Le regole**:Le rane possono scivolare verso spazi vuoti che si trovano immediatamente alla loro destra o alla loro sinistra come in Figura 2:

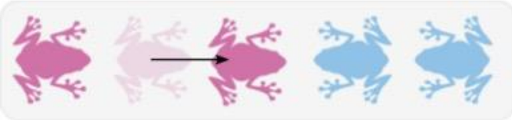


Fig. 2

Una rana può saltare sopra una rana a lei adiacente come in Figura 3:


Fig. 3

Per dettagli si veda: https://nrich.maths.org/content/00/12/game1/frogs/index.html#/student

Come procediamo? Per risolvere un problema complesso una possibile strategia è scomporre il problema in problemi più semplici.

**Abbiamo quattro compiti da svolgere:**
Compito 1: Acquisire familiarità con un gioco online.
Compito 2: Registrare/comunicare la propria soluzione.
Compito 3: Cercare un modello per una strategia di soluzione.
Compito 4: Verificare la strategia e la formula.

Compito 1: Acquisire familiarità con il gioco. lo possiamo fare con l'applicazione creata dall'Università di Cambridge e disponibile online a questo link: https://nrich.maths.org/1246

Iniziamo a sperimentare con 2 sole rane rosse e 2 rane blu come nella Figura 4.

Find a way to swap the 2 red and 2 blue frogs.

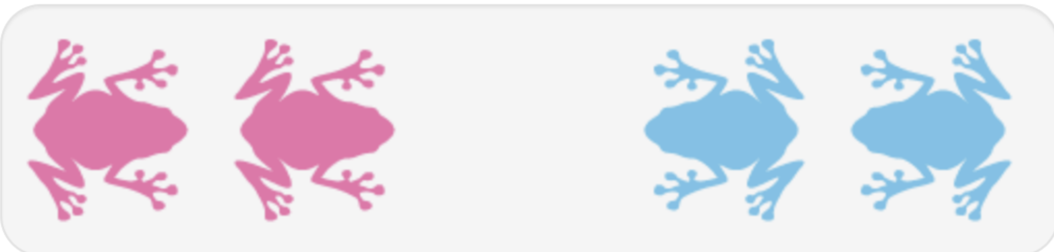


Fig. 4

Come alternativa possiamo costruire delle rane con la carta seguendo semplici passaggi di origami: [https://www.youtube.com/watch?v=FuygepwQyN8](https://www.youtube.com/watch?v=FuygepwQyN8)

Registrate il numero totale di movimenti per ogni tentativo.
L'obiettivo è minimizzare il numero delle mosse. Scopriamo presto che la soluzione migliore non deve prevedere passi indietro.

**Compito 2: Registrazione / comunicazione della soluzione** (≈5 min).
Discutete su come registrare la vostra soluzione in modo che possa essere riprodotta.
Provate a rendere il gioco più complesso passando da 4 rane (2 blu e 2 rosse) a 6 rane (3 blu e 3 rosse) come nella Figura 5.

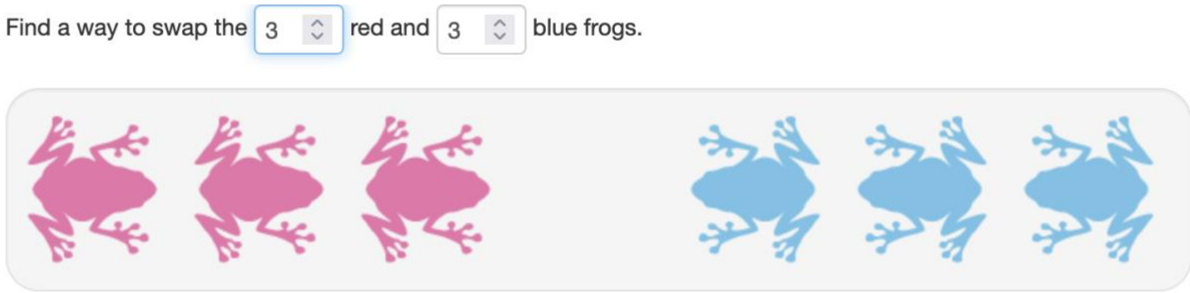



Fig. 5

Suggerimento: Come si potrebbero registrare le mosse in un gioco da tavolo?
Impariamo ad utilizzare una tabella per registrare le mosse (≈10 min).
Una buona visuale può aiutare a identificare una strategia per risolvere il problema problema per qualsiasi numero di rane.
Utilizzate la tabella in Figura 6 per registrare una soluzione che abbia le mosse minime.

| R3 | R2 | R1 |  | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  | 1 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 1 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Fig 6

**Compito 3: Trovare la strategia ottima e la formula** (≈12 min.)
Utilizzando la tabella riempita:
Trovare la formula per il numero di mosse. Trovare la strategia per spostare le rane.

Elencate le mosse indicando il colore della rana che si muove:
R, B, B, R, R, RB, B, B
R, R, R, B, B, R

Contate le mosse fatte:

1+ 2 + 3
+ 3
+ 3+2+1
Vedete uno schema?
Riuscite a trovare il numero di mosse per 4 rane, o 5 rane o, più in generale, per n rane?

Elencate le mosse in modo alternativo: in questo modo non solo indichiamo il colore della rana che si muove ma anche se si tratta della rana associata al numero 1, 2 o 3 (i numeri si riferiscono alla posizione che quella rana ha all'inizio del gioco, è come se le rane avessero attaccato un cartellino che riporta il loro numero che è scritto in rosso o blu a seconda del loro colore). Ecco come le stesse mosso di prima si possono elencare in modo alternativo e con un maggiore contenuto di informazioni:

1,
1, 2,
1, 2, 3
1, 2, 3
1, 2, 3,
2, 3,
3

**Compito 4: verifica la strategia e la formula.**
Ora che avete trovato una formula per n rane, verificatela:
Avete risolto il caso delle 2 rane in 8 mosse. La formula concorda?
Giocate il gioco per più rane e implementate la vostra strategia. Verificate che vi dia il minor numero di mosse. Verificare cioè che il numero minimo di mosse sia previsto correttamente dalla vostra formula.

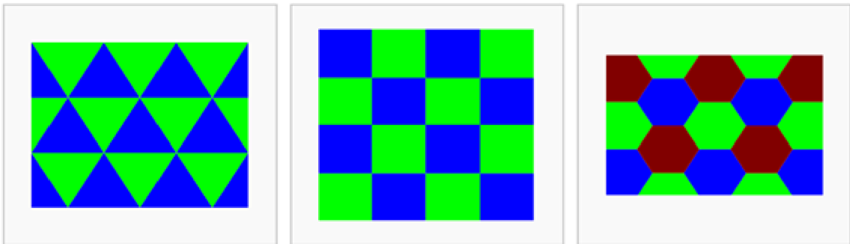
Ben fatto, se siete arrivati fino a questo punto avete seguito i passaggi tipici della ricerca scientifica:
1 – osservo una situazione e cerco di capire il problema che devo risolvere
2 – la descrivo in termini prima visivi e poi matematici, per esempio con una tabella e cercando delle regolarità, degli schemi che mi aiutano a capire meglio la situazione
3 – cerco di spiegare la situazione e una possibile soluzione usando il formalismo matematico
4 – cerco di capire se il mio formalismo, in questo caso la formula, sia verificata in generale

Seguendo questi semplici passi, uno dopo l'altro, la Scienza ci ha portato fin sulla luna… e oltre!

# TASSELLAZIONI-PAVIMENTAZIONI

**Cos'è?** Una tassellazione è la ripetizione periodica di una stessa figura che ricopre un piano senza sovrapposizioni né buchi. Le figure utilizzate per ricoprire la superficie, i tasselli, sono spesso poligoni, regolari o non, ma possono anche avere lati curvilinei o essere senza alcun vertice.

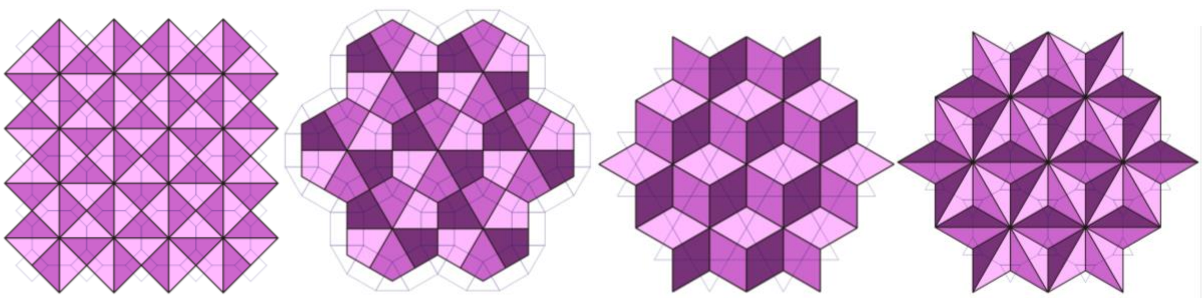
**Perché?** Alcune figure, e.g. triangolo, quadrato, rettangolo, esagono, ecc., ci permettono di realizzare una tassellatura completa, altre invece no. Come mai? E come è possibile prevedere il risultato? Ci aiuta la matematica: in generale, basta sommare le ampiezze degli angoli formati in uno qualsiasi dei punti d'incontro dei tasselli per capirlo. Se il risultato dell'addizione delle ampiezze di questi angoli è diverso da 360°



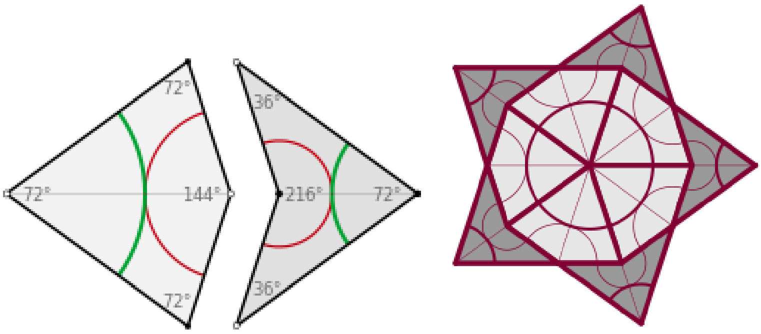
Tasselli triangolari Tasselli quadrati Tasselli esagonali

non sarà possibile realizzare una tassellatura completa, altrimenti sì. Se poi imponiamo per tutta la tassellatura l'utilizzo di un solo poligono regolare, cioè

con lati e angoli uguali, abbiamo soltanto 3 configurazioni possibili. Infatti, in questo caso la misura degli angoli del tassello dovrà essere un divisore intero di $360^{\circ}$e quindi andranno bene solo il triangolo equilatero ($60^{\circ}$), il quadrato ($90^{\circ}$) e l'esagono regolare ($120^{\circ}$):



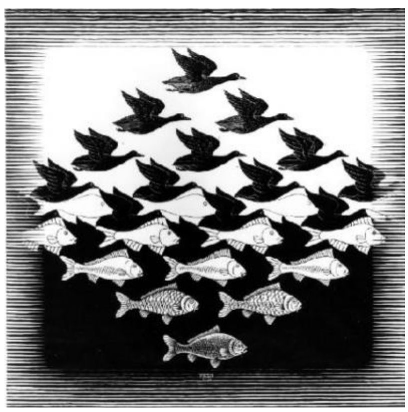
**Curiosità:** le tassellature sopra illustrate sono dette *regolari* in quanto usano, ciascuna, una sola forma geometrica. Nel 1974 Roger Penrose e Robert Ammann scoprirono varie tassellature *irregolari*, ovvero facenti uso di più figure geometriche in una sola tassellatura, tra le quali l'aquilone e il dardo.




In natura sono presenti tassellature *infinite*, ovvero la cui forma geometrica di base è ripetuta in maniera continua. Ne è un esempio l'esagono nell'alveare delle api:

L'artista olandese Maurits Cornelis Escher è famoso per le sue tassellature che rappresentano spesso animali come pesci, uccelli e cavalli.

M.C. Escher, *SkyandWater I*, 1938



Collegamenti didattici: ***Geometria.***

La copertura del piano o dello spazio con figure regolari che si ripetono è un problema classico della geometria, ancor prima che artistico. Coinvolge tutta una serie di concetti geometrici come le riflessioni, le rotazioni, le traslazioni e, non ultimo, la *sezione aurea*.
Più in generale, oggetti come il tangram/stomachion, il quadrato magico, la Torre di Hanoi e il piano tassellato mettono in forma di gioco sistemi con regole molto precise, che consentono di dedurre e quindi prevedere con certezza tutta una serie di risultati spesso invisibili in partenza. Anche se questo non li rende banali o semplici da risolvere (emblematico il caso dello Stomachion). Tutto il contrario dei giochi basati sul caso, come quelli d'azzardo.

Collegamenti didattici: ***Filosofia.***

Quello che iniziò Aristotele più di 2000 anni fa, lo sta continuando adesso un team di 30 studenti universitari del Massachusetts Institute of Technology. Partono da un recente risultato matematico che ha ridato nuova vita alla millenaria caccia alle forme geometriche che possono tassellare, cioè riempire perfettamente, lo spazio tridimensionale. "È entusiasmante sapere che alcune delle più grandi menti di tutti i tempi hanno lavorato su questo argomento.

**Altre risorse esterne:**
(In inglese) https://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation
Esaustiva pagina di Wikipedia sulle tassellature.
(In inglese) https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling
Pagina di Wikipedia sulla tassellatura di Penrose.

# GIOCHI DI SEMINA

I giochi di semina sono una famiglia di giochi da tavolo diffusi in gran parte del mondo (specialmente in Africa, Medio Oriente, Sud-est asiatico e in America centrale). La similitudine di molti aspetti del gioco con l'attività agricola e la semplicità del tavoliere e dei pezzi, il grande numero di varianti e la loro diffusione nel mondo fanno pensare a un'origine estremamente antica; secondo alcuni, forse, prossima alle origini stesse della civiltà.

**Si tratta di antichi giochi precursori del backgamon.** Il gioco è uno strumento universale che aiuta a conoscere meglio se stessi e gli altri. Il gioco è passatempo, svago e allo stesso tempo un veicolo che permette, quasi senza accorgersene, di appropriarsi di abilità utili nello sviluppo di ciascun individuo.

Il **Mancala** è un antichissimo gioco africano che fa parte della famiglia dei giochi di semina.
In una delle versioni più diffuse il mancala è un tavoliere che ha due file parallele di sei buche, una fila per ciascun giocatore. In ogni buca vengono messe quattro pedine, i *semi*. Ai lati due recipienti, i mancala, contengono i semi guadagnati. Possono essere fagioli, semi, bacche o chicchi, sassi oppure come abbiamo fatto noi, conchiglie.
Il tavoliere rappresenta il cielo e la terra e in alcune culture il movimento delle pedine simula gli atti della semina e del raccolto.

Regole:
A turno ciascun giocatore prende tutte le pedine contenute in una delle sei buche della sua fila e, procedendo in senso antiorario, le “semina” nelle buche che si trovano in successione dopo quella dalla quale le ha prelevate, una per buca compreso naturalmente il proprio mancala.
Se, durante il gioco, uno dei due giocatori arriva con l'ultima sua pedina in una buca vuota oppure contenente più di due biglie non ne prende alcuna. Se invece la buca contiene 1 o 2 pedine, esclusa quella da lui deposta, ha diritto a prendere tutte le pedine della buca, compresa la sua.
Il gioco termina quando uno dei due giocatori non ha più pedine sufficienti per potersi muovere. In questo caso l'avversario cattura le pedine rimaste e vince il giocatore che ha catturato più pedine. Tuttavia, per evitare che una situazione del genere si presenti troppo presto nel gioco, è proibito vuotare completamente la fila dell’avversario, impedendogli così di fare una contromossa, a meno che tutte le mosse possibili non blocchino, in ogni caso, l'avversario. Il giocatore che non rispetta quest'ultima regola viene punito: il suo avversario cattura tutte le pedine rimaste in gioco.

# DIAMO I NUM3RI!

# DADI

# QUINCONCE O MACCHINA DI GALTON

La macchina di Galton prende il nome da Sir Francis Galton, matematico e statistico inglese che la sviluppò alla fine del XIX secolo per spiegare alcuni concetti statistici. Sir Francis Galton era cugino di Charles Darwin e fu molto influenzato dal lavoro di Darwin sull'evoluzione e la selezione naturale.

**Come giocare?**

**FASE 1:** Lasciate prima cadere una pallina e cercate di indovinare in quale casella in basso finirà.È piuttosto difficile da prevedere!
Se un bambino indovina esattamente la casella, ottiene 3 punti.
Se sbaglia di una casella (a destra o sinistra), il bambino ottiene 2 punti
Se sbaglia di 2 caselle riceve solo 1 punto.
Altrimenti zero punti.
Vince chi totalizza più punti.

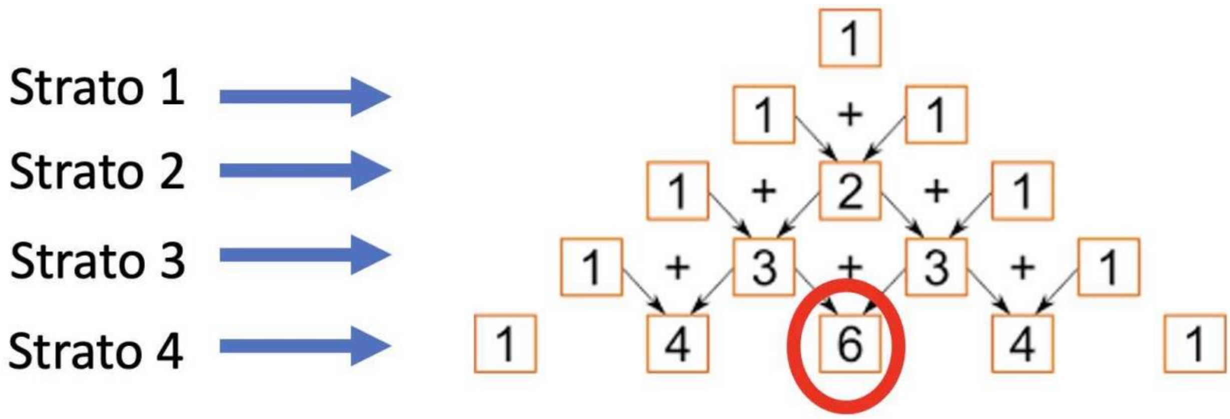
**FASE 2:**
Lasciate ora cadere una manciata di palline e cercate di indovinare quante finiranno nelle caselle più laterali (all'estrema destra o all'estrema sinistra).
Se il bambino dice che 10 palline cadranno nella casella estrema destra e nessuna pallina finisce in quella casella, perde 10 punti.
Se il bambino dice 10 e 1 pallina finisce all'estrema destra, perde 9 punti (10-1). E così via.

**FASE 3:**
Ora lasciate cadere tutte le palline.
Cosa pensate che succederà?
Possiamo prevedere dove finiranno?

**Cosa abbiamo imparato?**
Nella parte alta della macchina di Galton le palline cadono in modo disordinato e caotico ma, “come per magia”, alla base si incanalano in diverse caselle formando SEMPRE il profilo di una "campana" nota come **distribuzione gaussiana o normale**.
Come si giustifica questa regolarità?
Su ogni piolo la singola pallina può "decidere" di rimbalzare a destra o a sinistra.

Se la pallina "volesse" andare nell'ultima casella a destra, dovrebbe "decidere" di rimbalzare sempre a destra.
In altre parole, **esiste un solo percorso** che porta la pallina all'ultima casella a destra.
Lo stesso vale per l'ultima casella a sinistra.
Esistono invece **molti più percorsi** che portano la pallina nelle caselle centrali.
Ad esempio, un rimbalzo a destra seguito da uno a sinistra e così via, portano la palla alla casella centrale.
Ma anche: due rimbalzi a destra e due a sinistra e così via, portano la palla alla casella centrale.
In generale, è sufficiente che il numero di passi/rimbalzi effettuati a destra sia uguale al numero di passi/rimbalzi effettuati a sinistra perché la pallina finisca esattamente nella casella centrale.

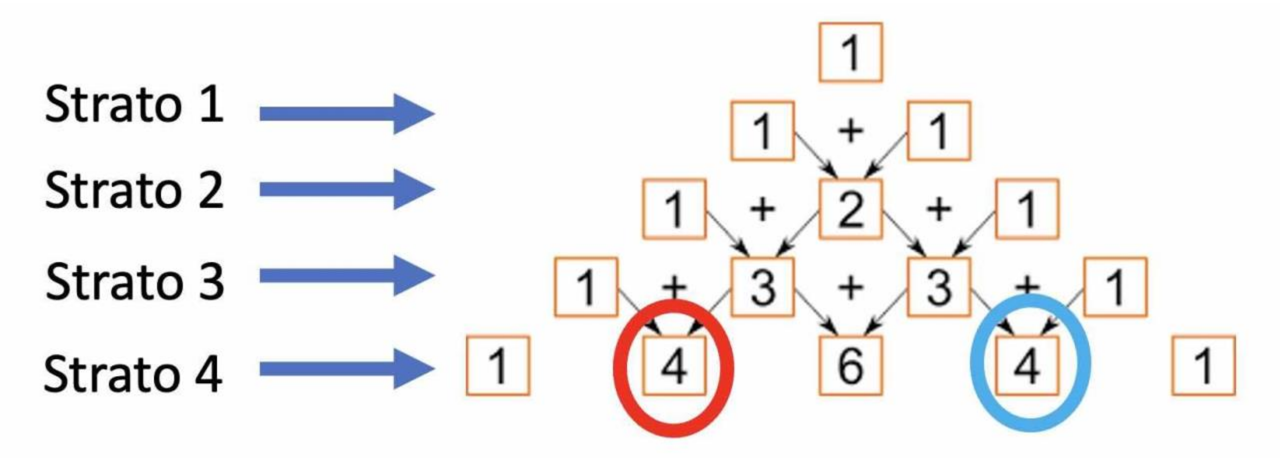
Se ci fossero solo 4 strati di pioli il numero di percorsi che portano esattamente alla casella centrale sarebbe 6, come mostrato nell'ultima riga del triangolo di Tartaglia qui sotto. Riuscite a trovare tutti i possibili percorsi che portano alla casella centrale?




Nel triangolo di Tartaglia ogni numero è la somma dei numeri che lo precedono, come nell'immagine.

**Esercizio**: completare il triangolo con altri strati.

Sempre con 4 strati, il numero di percorsi che portano esattamente alla penultima casella a sinistra sarebbe 4, come mostrato nell'ultima riga del triangolo di Tartaglia qui sotto.




Riuscite a trovare tutti questi percorsi?
E qual è il numero di percorsi che portano alla penultima casella a destra?
Ci sono simmetrie interessanti!

Se invece di 4 ci fossero 6 strati di pioli nella parte superiore di questa postazione, il numero di percorsi che portano esattamente al centro sarebbe 20 come si legge nell'ultima riga del triangolo di Tartaglia riportato sotto.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

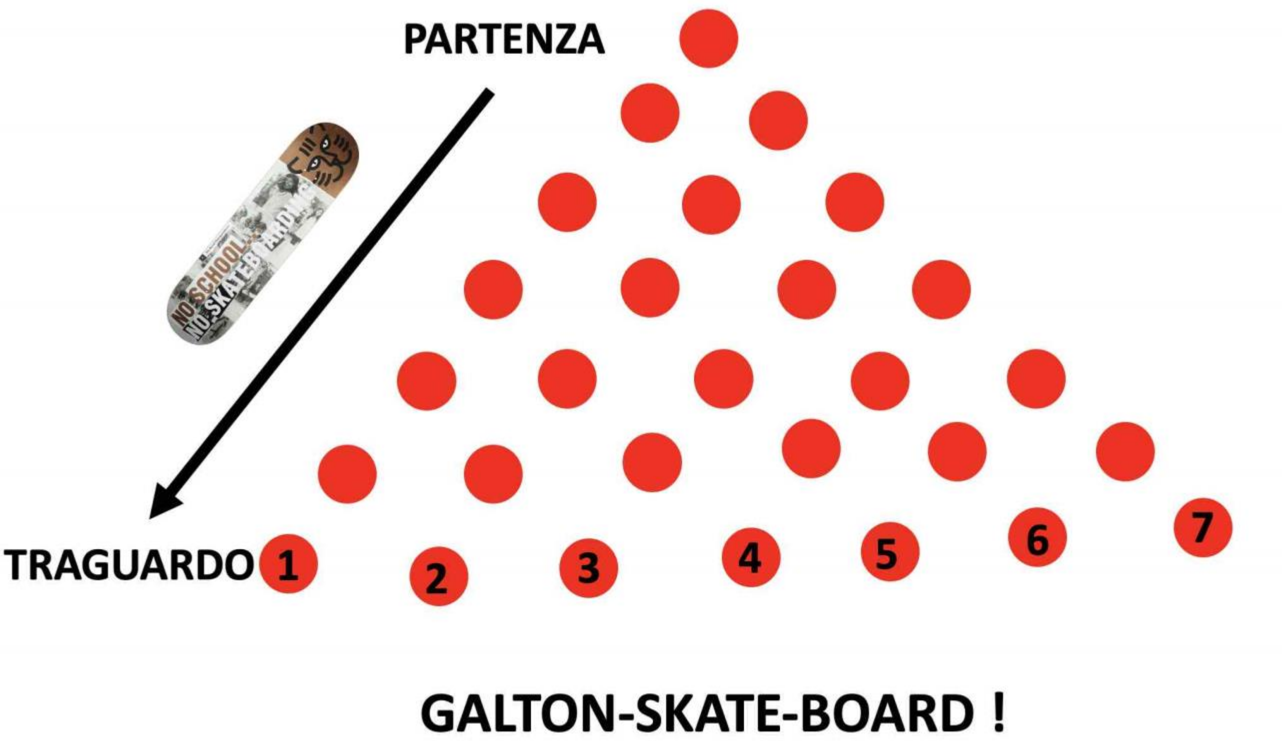
Il triangolo di Tartaglia è importante anche nel calcolo dei coefficienti nello sviluppo della potenza n-esima del binomio $(a+b)^n$.

La distribuzione Gaussiana è simmetrica rispetto alla media che è anche la moda e la mediana e questa simmetria è "simile" a quella che osserviamo nel triangolo di Tartaglia.
È il Teorema del Limite Centrale che sta alla base della regolarità che osserviamo nelle caselle di questa postazione in cui le palline si incanalano in modo ordinato, un ordine che contrasta con la casualità che si osserva nella parte alta della postazione. È anche grazie a questa regolarità, dettata dal Teorema del Limite Centrale, che gli statistici riescono a fare previsioni sulla base di grandi campioni.

**Che cosa impariamo da questo gioco con riferimento alla vita di tutti i giorni?**

- Ogni pallina può essere considerata come una persona
- Quando le persone prendono decisioni binarie (con solo 2 opzioni possibili, come votare o non votare, andare a scuola o non andare a scuola, viaggiare o non viaggiare) si comportano come una pallina che "decide" di andare a destra o a sinistra.
- Se le decisioni delle persone sono indipendenti le une dalle altre, possiamo studiare il risultato di molte decisioni prese da tante persone utilizzando la curva gaussiana.
- Carl Friedrich Gauss è stato un matematico, fisico e astronomo tedesco vissuto dal 1777 al 1855. È considerato uno dei più grandi matematici di tutti i tempi.

**Galton Skate-Board su carta**
Stampate (o disegnate) questa immagine:




**Come si gioca con la Galton-Skate-Board?**

- Ogni bambino ha un oggetto che rappresenta il suo skateboard.
- Ogni bambino ha una moneta che viene lanciata 6 volte.
- Lo skateboard parte dalla "partenza" e finisce sulla linea del "traguardo".
- Ogni volta che il lancio della moneta è TESTA, lo skateboard scivola di un passo verso il cerchio rosso a destra.
- Ogni volta che il lancio della moneta è CROCE, lo skateboard scivola di un passo verso il cerchio rosso di sinistra.
- In quale posizione finale (1, 2,... o 7) finirà la maggior parte degli skateboard?

- NOTA: Più bambini giocano, minore sarà l'incertezza del risultato!
- Ogni bambino può giocare più volte tenendo traccia, ogni volta, della posizione finale.
- Si possono sostituire i lanci di monete (con testa e croce) con sassi, bianchi e neri.
- Si ha un sacchetto con un numero uguale di pietre bianche e nere e a turno i bambini selezionano 6 pietre: se la pietra è bianca fanno scivolare il loro skateboard verso il cerchio rosso di sinistra, se è nera fanno scivolare il loro skateboard verso il cerchio rosso di destra.
- Una volta che un bambino ha finito, le sue pietre vengono rimesse nel sacchetto e inizia il bambino successivo.
- Riflettiamo insieme: cosa succede se il numero di pietre bianche è maggiore di quelle nere?

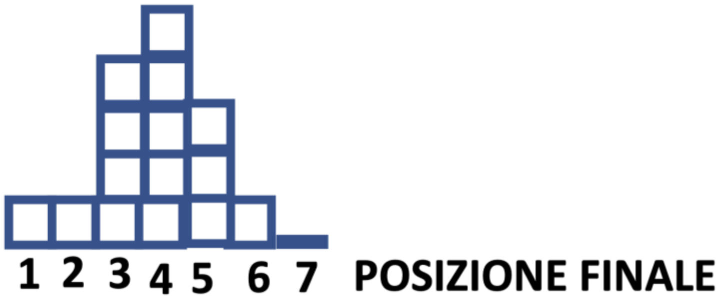
Inserire la posizione finale dello skateboard di ogni bambino in ogni giocata in una griglia simile a quella riportata sotto.

| | GIOCATA 1 | GIOCATA 2 | GIOCATA 3 |
|---|---|---|---|
| **BIMBO 1** | | | |
| **BIMBO 2** | | | |
| **BIMBO 3** | | | |
| **BIMBO 4** | | | |
| **BIMBO 5** | | | |

ESEMPIO di esito del gioco Galton-Skate-Board

| | GIOCATA 1 | GIOCATA 2 | GIOCATA 3 |
|---|---|---|---|
| **BIMBO 1** | Posizione finale 5 | Posizione finale 4 | Posizione finale 3 |
| **BIMBO 2** | Posizione finale 4 | Posizione finale 3 | Posizione finale 5 |
| **BIMBO 3** | Posizione finale 4 | Posizione finale 1 | Posizione finale 4 |
| **BIMBO 4** | Posizione finale 3 | Posizione finale 4 | Posizione finale 5 |
| **BIMBO 5** | Posizione finale 6 | Posizione finale 3 | Posizione finale 2 |

Posizione finale 1: raggiunta 1 volta
Posizione finale 2: raggiunta 1 volta
Posizione finale 3: raggiunta 4 volte
Posizione finale 4: raggiunta 5 volte
Posizione finale 5: raggiunta 3 volte
Posizione finale 6: raggiunta 1 volta
Posizione finale 7: raggiunta 0 volte




L'immagine che vedete si chiama istogramma ed è una rappresentazione grafica dei dati. Consiste in una serie di barre di uguale larghezza. L'altezza di ogni barra rappresenta la frequenza o il numero di osservazioni di ogni risultato del gioco.

**SPIEGAZIONE**

- La maggior parte degli skateboard finirà nella posizione 4
- Pochissimi finiranno nelle posizioni 1 e 7.
- Perché?
- Esiste un solo percorso che conduce alla posizione finale 1: **C, C, C, C, C, C**
- Esiste un solo percorso che conduce alla posizione finale 7: **T, T, T, T, T, T**
- Ci sono molti percorsi che portano alla posizione finale centrale 4, ad esempio: **C, T, C, T, C, T** oppure **T, T, T, C, C, C** oppure **C, C, C, T, T, T**
- In generale ogni percorso con **3 C** e **3 T** porta alla posizione finale 4

**APPLICAZIONI REALI**

La macchina di Galton illustra il Teorema del limite centrale, un teorema che è CENTRALE per le previsioni che diventano più affidabili man mano la "dimensione del campione" diventa sempre più grande (nel LIMITE).

**<u>ESEMPIO 1) Altezza dei bambini</u>**

- Misurare l'altezza di 20 bambini e calcolare l'altezza media.
- Chiamiamo questa quantità la **media della popolazione.**
- Ogni bambino prende ora un foglio e scrive il proprio nome.
- I fogli vengono messi in una scatola e a caso (senza guardare) vengono selezionati 10 nomi. Si calcola l'altezza media dei bambini selezionati (campione). Chiamiamo questa media la **media del campione.**

- Il teorema del limite centrale ci dice che la media del campione dovrebbe essere molto vicina alla media della popolazione.
- Se vengono selezionati meno bambini nel campione, ad esempio 5, le due medie (popolazione e campione) dovrebbero essere ancora vicine, ma probabilmente meno vicine.
- Se viene selezionato un solo bambino, è difficile dire qualcosa sulla sua altezza.
- Questo è simile a ciò che accade quando lanciamo una singola pallina nella macchina di Galton: è difficile prevedere dove finirà.
- Se abbiamo una manciata di palline (equivalente ad un campione) allora è più facile fare previsioni.

**ESEMPIO 2) Stipendio medio regionale**

- Stipendio delle persone in una regione: è troppo dispendioso in termini di tempo chiedere a ogni persona di una regione il suo stipendio e poi calcolare lo stipendio medio della regione.
- È molto più semplice prendere un campione casuale (rappresentativo) di persone nella regione e calcolare lo stipendio medio del campione.
- Il teorema del limite centrale ci dice che il salario medio della regione è molto vicino al salario medio del campione. E si avvicina sempre di più al valore vero quanto più grande è il numero di persone nel campione, purché il campione sia rappresentativo.

# PENTOLOTTO

**Cos'è?** Il gioco del lotto consiste nell'estrazione senza re-immissione da un'urna, di alcune palle numerate tutte differentemente. Il vincitore – quando c'è! – è la persona che avrà saputo prevedere una parte o il totale delle palle numerate estratte. In Svizzera il gioco del lotto è stato introdotto nel 1970 e la prima vincita milionaria è arrivata nel 1979. All'inizio si giocava con 40 numeri poi si è passati a 42, nel 1986 a 45 e dal 2013 di nuovo a 42, di cui se ne estraggono 6. La probabilità di indovinare 6 numeri su 42 è 1 su 5.245.786.

**Perché?** Giocando al lotto siamo tentati di puntare sui numeri che non sono usciti da più tempo, i cosiddetti numeri "ritardatari". Purtroppo, però è solo il caso a decidere: non ci sono trucchi o metodi, in quanto ogni numero ha la stessa possibilità di uscire. La probabilità che esca un numero corrisponde a 1/42, poco più del 2%. Un numero può anche ritardare centinaia di estrazioni ma la sua probabilità di uscita resta sempre 1/42, non aumenta, tantomeno diminuisce. Questo tipo di gioco non ha memoria; eppure, siamo portati a credere il contrario.

Ma il lotto è un gioco **equo**? Un *gioco* si dice *equo* se corrisponde un premio che dipende dalle probabilità di vincita. Nel lancio di una moneta, la probabilità di indovinare se uscirà testa o croce è 1 su 2. Il gioco è equo se puntando un franco se ne possono vincere 2. In tutti gli altri casi il gioco è sbilanciato, di solito a favore del banco. Il lotto non è un gioco equo, il banco usufruisce di un vantaggio assicurato dall'alto numero di giocate e dall'iniquità delle quote pagate come premio rispetto alla probabilità di vincita. Pertanto, anche se il giocatore a volte vince – anche cospicui premi – a lungo termine è sempre perdente.

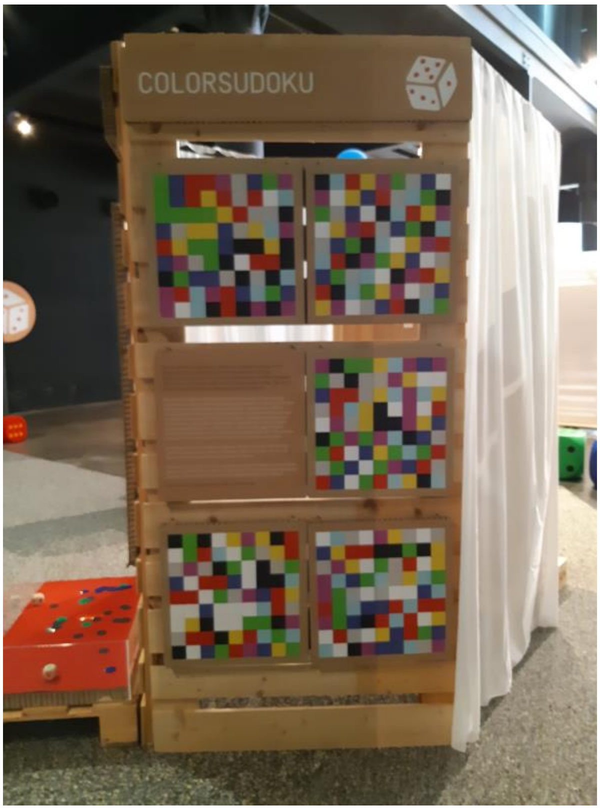
Qual è la probabilità d'indovinare 3 numeri su 42? Supponiamo di scegliere: 2, 11, 29. Questi possono essere estratti in 6 modi diversi, e.g. (6=3!=3x2x1; n!=nx(n-1)x(n-2)x...x1): 2,11,29 - 2,29,11 -29,2,11 - 29,11,2 - 11,29,2 - 11,2,29. Quante sono le terne possibili con 42 numeri? Bisogna combinare 42oggetti a 3 a 3, in termini matematici equivale a calcolare 42!/(3!x(42-3)!) cioè (42x41x40)/6=11.480. Quindi la probabilità di indovinare un terno con 42 numeri è 1 su 11.480. Bassa? Con gli stessi calcoli scopriamo che la probabilità di indovinare 6 numeri su 42 è 1 su 5.245.786. È stato calcolato che è più probabile che l'asteroide 99942 Apophis nel 2036 colpisca la

Terra – la probabilità è 1 su 40.000). Ma i giocatori sono così tanti che a volte qualcuno li indovina davvero.

**Curiosità:** Ogni anno dodicimila progetti di pubblica utilità nei settori della cultura, dello sport, dell'ambiente e delle opere sociali vengono sostenuti con i proventi di *Swisslos*: ogni giorno un milione di franchi svizzeri di utile netto di *Swisslos* affluisce nei fondi cantonali. Dalla sua creazione *Swisslos* ha investito circa cinque miliardi di franchi in progetti benefici e di pubblica utilità ciò che fa di *Swisslos* il promotore svizzero più importante nell'ambito della cultura e dello sport.
Il lotto svizzero, da quando esiste, ha creato ottocento milionari.

**Altre risorse esterne**:
http://old.sis-statistica.org/magazine/spip.php?article172
Che c'azzecca la statistica col lotto?
http://www.festadellamatematica.it/doc2013/Antonelli-lottologia-CC.pdf
Considerazione sulla lottologia

# COLOR SUDOKU




Tutti i pannelli colorati di questa postazione sono stati generati ponendo a caso i nove colori nella griglia 9x9 tranne uno dei pannelli (quello in alto a destra) che è deterministico (un unico colore per riga, per colonna, per diagonale e nei sotto quadrati 3x3). Richiamo al quadrato magico. Richiamo al fatto che la causalità può creare dei pattern che non ci aspettiamo.
Si chiede al visitatore: quale è il pannello “diverso”. Perché pensi che questo sia diverso?
Questa postazione si può accompagnare al gioco “magico” di indovinare quale fra due sequenze di teste e croci in un esperimento mentale e in un lancio effettivo della moneta 10 volte è quella “inventata”.

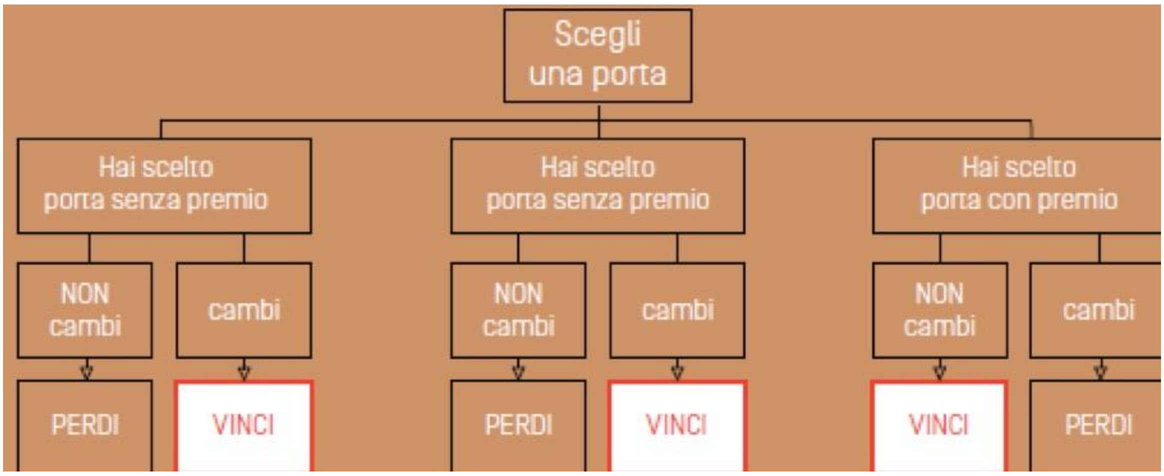
Far scrivere su di un foglio le due sequenze in ordine scelto dal visitatore e poi l’animatore indovina quale è la sequenza effettiva (ottenuta cioè dall’effettivo lancio di una moneta) e quale è invece stata inventata. Nel lancio effettivo è più probabile che ci siano sequenze di 3 o più facce uguali della moneta.

# FAI LA TUA SCELTA

**Cos'è?** Questo paradosso s'ispira al quiz televisivo americano degli anni '60 *Let's make a deal*, condotto dal presentatore Monty Hall. Il gioco è composto da tre porte, dietro ciascuna delle quali c'è un premio o un *non-premio* il premio si nasconde dietro una sola porticina. La probabilità che il premio si trovi dietro una data porta è identica per tutte le porte ed è 1 su 3.
Il giocatore sceglie una delle porte e lo dice a tutti. Il conduttore sa ciò che si nasconde dietro ciascuna porta e deve aprire una delle porte non selezionate dal giocatore e assolutamente una senza premio: se il giocatore ha scelto una porta perdente, il conduttore aprirà l'altra porta perdente, se invece il giocatore ha scelto la porta vincente, il conduttore apre a piacimento una delle due porte rimanenti.

Dopo aver aperto la prima porta, Il conduttore offre al giocatore la possibilità di scoprire ciò che si trova dietro la porta che aveva inizialmente scelto o di cambiare. Qual è la strategia migliore per il giocatore? Mantenere la prima scelta o cambiare?

**Perché?** Sembrerebbe un paradosso ma è meglio cambiare la scelta iniziale: così facendo si raddoppia la probabilità di vincere. Com'è possibile?



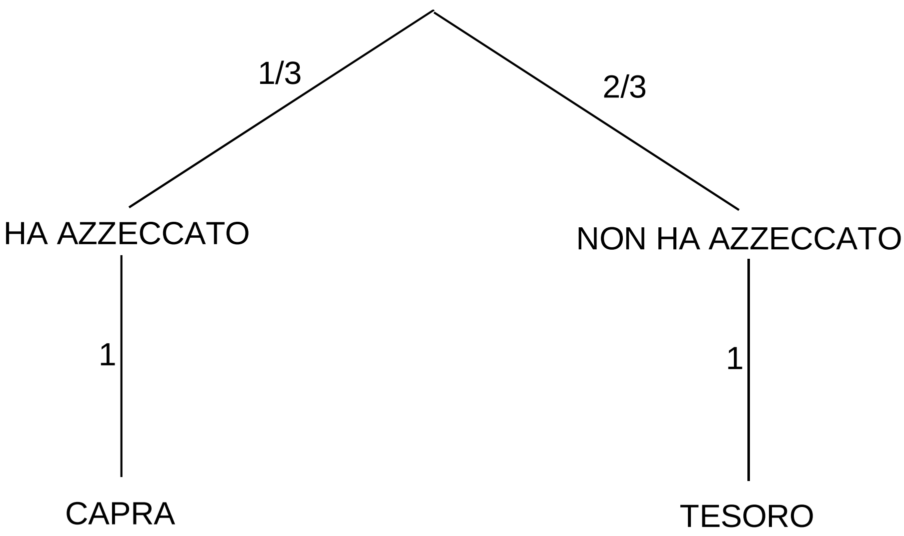

All'inizio ci sono tre scenari possibili, ciascuno avente probabilità 1/3:
Il giocatore sceglie la prima porta non vincente (numero 1), Il conduttore mostra l'altra porta non vincente, (numero 2): cambiando il giocatore vince. Non cambiando perde.
Il giocatore sceglie la seconda porta non vincente (numero 2). Il conduttore sceglie l'altra porta non vincente (numero 1): cambiando, il giocatore vince. Non cambiando perde.
Il giocatore sceglie la porta vincente. Il conduttore mostra una delle due porte perdenti. Cambiando, il giocatore perde. Non cambiando vince.

Nei primi due scenari il giocatore vince solo cambiando; nel terzo scenario il giocatore che cambia non vince: la strategia "cambiare" porta alla vittoria due volte su tre (2/3), mentre quella del "non cambiare" porta alla vittoria solo in un caso su tre (1/3).

**Curiosità:** La risoluzione di questo problema è talmente contro-intuitiva che diversi accademici non la riconobbero finché non venne loro spiegata dettagliatamente. Un modo semplice per comprenderla è quella di aumentare il numero di porte: mettiamo questa volta 4 porte, 3 perdenti e una vincente. Il giocatore, come prima, sceglie una porta, il conduttore però ne mostra due – perdenti, come prima – e in seguito chiede al giocatore se vuole cambiare o tenere la sua scelta iniziale. Ci saranno quindi 3 eventualità su 4 nelle quali il giocatore vince solo se cambia e 1 su 4 in cui vince solo se non cambia.
Il risultato è valido e, anzi, è ancora più chiaro più si aumenta il numero delle porte.

**Un altro modo di rappresentare la soluzione del problema di Monty Hall**
**(con 3 porte, 2 capre e 1 tesoro)**

Se il giocatore decide di rimanere sulla prima scelta, la probabilità di azzeccare è 1/3 (ovvio).
Se decide di rifiutare la sua scelta iniziale, il seguito si può rappresentare con un semplice albero:




$$\boxed{P(\text{TESORO}) = 2/3 \cdot 1 = 2/3 = 2/3 > 1/3}$$

# ROULETTE

**Cos'è?** La roulette è un gioco d'azzardo che si svolge su un tavolo da gioco sul quale vi è un disco diviso in 37 caselle/settori numerate da 0 a 36 (dallo 00 a 36 nel caso della roulette americana), colorate di rosso e nero, la casella col numero 0 è verde, e un tappeto per le puntate.
Il gioco consiste nell'indovinare su quale settore numerato si fermerà la pallina.

Ci sono diversi tipi di possibilità di vincite e queste sono indicate sul tappeto per le puntate: pari/dispari, rosso/nero, numero esatto, coppie/quadrati di numeri, primo terzo, secondo terzo, terzo terzo, ecc. ai quali corrisponde individualmente un premio proporzionale al rischio della puntata.

**Perché?** Qual è la probabilità di vincere alla roulette puntando su un numero preciso? 1 su 37 (1 su 38 per la roulette americana). E quanto si vince?

Indichiamo con PO la "posta giocata", con PV la "probabilità di vincere" e con FA "fattore che moltiplica la posta".
Ma quali puntate sono favorevoli al giocatore? Per capirlo basta calcolare il prodotto fra la probabilità di vincere (PV) e il fattore (FA) che moltiplica la posta.

$$PV \times FA$$

<u>**Caso 1**</u>: Il giocatore scommette su un numero, se indovina, riceve 36 volte la PO, pertanto

$$PV = \frac{1}{37} \qquad FA = 36 \qquad PV \times FA = \frac{1}{37} \times 36 = \frac{36}{37} < 1$$

Dunque, il gioco è favorevole al Casinò.

<u>**Caso 2**</u>: Il giocatore scommette su 4 numeri, riceve 8 volte la PO, pertanto

$$PV = \frac{4}{37} \qquad FA = 8 \qquad PV \times FA = \frac{4}{37} \times 8 = \frac{32}{37} < 1$$

Anche in questo caso il gioco è favorevole al Casinò.

<u>**Caso 3**</u>: Il giocatore scommette su un colore (18 numeri sono rossi, 18 numeri sono neri e lo 0 è verde), riceve 2 volte la PO.

$$PV = \frac{18}{37} \qquad FA = 2 \qquad PV \times FA = \frac{18}{37} \times 2 = \frac{36}{37} < 1$$

Anche in questo caso il gioco è favorevole al Casinò.

Il gioco è dunque sempre più o meno favorevole al casinò. Il gioco sarebbe equo se il prodotto fra la probabilità di vincere (PV) e il fattore (FA) che moltiplica la posta fosse uguale a 1; più questo numero si allontana da 1 e meno il gioco è equo. Più è minore a 1 e più il gioco è a favore del Casinò.

**Curiosità:** Da dove arriva il gioco della roulette? Sono tante le storie sulle sue origini. I primi esempi di roulette risalgono addirittura al X secolo d.C. Nella sua forma originale, si pensa che sia stata inventata da un monaco cinese nel XIV sec. e importata in Europa da un missionario gesuita. Tuttavia, comunemente, se ne attribuisce la paternità al matematico francese Blaise Pascal (1632 - 1662), uno dei più grandi studiosi di probabilità.

## LUDOPATIE

**Il materiale relativo alle ludopatie è tratto da Azienda Ligure Sanitaria della Regione Liguria - ALISA, CNR**

Le prime testimonianze del gioco d'azzardo risalgono a oltre 6000 anni fa e sono state rinvenute in Egitto, Cina, Babilonia e India. Oggi il gioco d'azzardo ha assunto dimensioni rilevanti e una forte spinta commerciale, percepibile anche dalla pubblicità. Tuttavia, rispetto al passato, ha subito non pochi cambiamenti: spesso è mediato da una macchina, si svolge molto rapidamente e si rivolge sempre più al singolo individuo. I dati dello studio campionario ESPAD indicano che il 40 per cento degli studenti italiani di età compresa tra i 15 e i 19 anni ha giocato d'azzardo durante l'anno. Tra questi, l'11% è a rischio di sviluppare una dipendenza e circa l'8% ha già assunto un comportamento problematico. Il gioco d'azzardo patologico è riconosciuto come dipendenza dai sistemi nosografici internazionali (DSM V - disturbo da gioco d'azzardo). Determina alterazioni psicologiche e cognitive che trovano una spiegazione scientifica nello studio delle caratteristiche neurobiologiche del cervello e delle sue funzioni. La scienza rileva che il gioco d'azzardo è attivato da stimoli e impulsi di natura esogena (visivi, uditivi, tattili, olfattivi e gustativi) e di natura endogena (evocazioni mnesiche e/o sensazioni viscerali). Il laboratorio si propone di informare circa la differenza tra gioco e azzardo, rendendo consapevoli sui rischi della dipendenza comportamentale. Attraverso l'utilizzo di installazioni, attività interattive e di squadra i partecipanti potranno sperimentare i meccanismi che portano lo stimolo a diventare condizionamento, mettere alla prova i propri sensi e comprendere le relative alterazioni psicologiche e cognitive.

Alcuni dati interessanti sul gioco d'azzardo sono presenti al link
https://lab.gedidigital.it/finegil/2017/italia-delle-slot/

Per approfondimenti si consiglia la lettura di: GIOCHI D'AZZARDO E PROBABILITA' (a cura di P. Monari), Editori Riuniti, University Press.

**Cosa è il gioco d’azzardo?**

Si scommette, solitamente denaro o beni, sull’esito di un evento futuro. La scommessa, una volta giocata, non può essere ritirata. L’esito della scommessa è governato dal caso. L’abilità del giocatore non conta.

*Edvard Munch - At the Roulette Table in Monte Carlo*

In Italia la più antica lotteria risale al XVI secolo e porta ancora lo stesso nome: Lotto. A Genova, per la prima volta in Italia, nel 1576 il gioco del Lotto è stato legalizzato, a seguito di una lunga tradizione non riconosciuta di scommesse su molti avvenimenti (esiti delle elezioni dei Dogi, matrimoni, sesso dei nascituri).
In Italia Le scommesse sulle corse dei cavalli sono diventate un gioco d'azzardo popolare con la nascita del Totip nel 1948.
In Gran Bretagna nel XII e XIII secolo, le scommesse sulle corse dei cavalli, oggi tra le forme più popolari di gioco d'azzardo, erano definite "lo sport dei re". Ma nel 1661 veniva emanata la prima legge di divieto di gioco, allo scopo di impedire che le persone meno abbienti si indebitassero.
In Francia il filosofo Blaise Pascal nel XVI secolo è stato l'inventore della roulette.
In California nel 1885 l'americano Charles Fay ha costruito le prime *SlotMachines.*
(Fonte: Arnold P The Enrucionedio of Gomblino Chartwell Books 1977).
Roger Caillois (1913 - 1978) scrittore, sociologo, antropologo e critico letterario francese scrive la più nota Classificazione del GIOCO (1962) in cui compare la seguente definizione: “*ALEA giochi il cui esito può essere determinato unicamente dalla sorte, come nel caso del lancio di una moneta, nelle scommesse, nella roulette, lotteria...In questo tipo di giochi: l'abilità del giocatore è spesso ininfluente, il caso è dominante, il rischio è sempre presente*”.

**Azzardo: dal gioco alla patologia**

Classificazione: categoria Dipendenze,
sottocategoria: Disturbo non correlato all'uso di sostanze.
Si tratta di un comportamento da gioco d'azzardo problematico ricorrente e persistente che porta a stress o a un peggioramento clinicamente significativo.

# GIOCO DEI CAVALLINI E DELLA ZARA

**Gioco dei cavallini:** ci sono undici cavallini numerati da 2 a 12.I numeri dei cavallini corrispondono al risultato della somma del lancio di due dadi regolari (ciascuno con 6 facce e numeri da 1 a 6). I cavallini avanzano di un passo ogni volta che esce, come somma dei due dadi lanciati, il loro numero. Si ripetono i lanci dei dadi finché uno dei cavalli giunge all'arrivo. Su quale cavallino è meglio scommettere? Qual è il cavallino che ha più probabilità di vincere?

**Perché?** Il gioco mette in evidenza come non convenga scommettere sui cavalli più vicini agli estremi ovvero con numero 2 o 12 che sono quelli più lenti. È infatti meno probabile che questi numeri escano nel lancio di due dadi regolari poiché possono essere ottenuti solo con poche combinazioni. Ad esempio, il cavallino 11 può avanzare solo con due combinazioni 11= 5 + 6 e 6 + 5. Mentre è molto più probabile che escano i numeri centrali.
Per esempio, 7 = 1+6, 6+1, 2+5, 5+2, 3+4 e 4+3.
In totale, se si lanciano due dadi – con valori da 1 a 6 – si possono ottenere 6x6=36 risultati (casi possibili). Le frequenze delle possibili somme sono le seguenti:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Cavallino 2: 1+1 = | 1/36 | Cavallino 12: 6+6 = | 1/36 |
| Cavallino 3: 1+2, 2+1 = | 2/36 | Cavallino 11: 5+6, 6+5 = | 2/36 |
| Cavallino 4: 1+3, 3+1, 2+2 = | 3/36 | Cavallino 10: 4+6, 6+4, 5+5 = | 3/36 |
| Cavallino 5: 1+4, 4+1, 3+2, 2+3 = | 4/36 | Cavallino 9: 3+6, 6+3, 4+5, 5+4 = | 4/36 |
| Cavallino 6: 1+5, 5+1, 4+2. 2+4, 3+3 = | 5/36 | Cavallino 8: 2+6, 6+2, 3+5, 5+3, 4+4 = | 5/36 |
| Cavallino 7: 1+6, 6+1, 2+5, 5+2, 3+4, 4+3, = | 6/36 | | |

Il 7 è il risultato più probabile. Ciò significa che conviene scommettere sul cavallo numero 7, tuttavia non vi è la certezza di vincere. Il caso può far vincere uno qualsiasi degli 11 cavalli.

Una spiegazione ancora più intuitiva si può ottenere facendo lo stesso gioco con 3 cavallini: uno nero, uno grigio, uno bianco. Per farli avanzare si estraggono 2 palline da un sacchetto. Se si ottengono 2 palline nere avanza il cavallo nero, se si estraggono 2palline bianche avanza il cavallo bianco, se otteniamo una pallina nera e una bianca avanza il cavallo il grigio. I risultati possibili: 2 (colori) x 2 (palline estratte) sono 4. Quale cavallino ha maggiori probabilità di vincere?

| | | |
|---|---|---|
| Cavallino nero: | nera + nera= | ¼ (25%) |
| Cavallino bianco: | bianca + bianca= | ¼ (25%) |
| Cavallino grigio: | bianca + nera oppure nera + bianca = | 2/4=1/2 (50%) |

Il cavallo favorito è quindi il grigio!
Partendo da questo gioco si può riflettere sul tema delle scommesse sui cavalli e agganciarsi alla sensibilizzazione verso le ludopatie (vedi scheda relativa alla roulette).

**Curiosità:** La Zara, dall'arabo *zar*, dado, è un gioco d'azzardo molto diffuso già nel Medioevo e consiste nel lancio di tre dadi sul quale ogni giocatore a turno scommette l'uscita di un numero da 3 a 18 corrispondente alla somma dei tre numeri indicati dai dadi. Vince chi indovina per primo. Già nel ‘600 però, molti giocatori incalliti si erano accorti che il 10 e l’11 uscivano più frequentemente del 9 e del 12, ma non ne capivano il motivo dal momento che questi potevano uscire con lo stesso numero di combinazioni. Il problema era così sentito che il Granduca di Toscana chiese a Galileo Galilei di studiarlo. Galilei scrisse:

> *“...ancor che il 9 e ’l 12 in altrettante maniere si componghino in quante il 10 e ’l 11, per lo che di eguale uso devriano esser reputati, si vede non di meno che la lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l’11 che ’l 9 e ’l 12.”*
>
> (Galilei G., *Sopra le scoperte de i dadi*, probabilmente scritto negli anni tra il 1612 e il 1623, poco dopo l’arrivo di Galilei a Firenze)

Galileo notò che sia il 10 sia l’11 “si ottengono con lo stesso numero di *triplicità”* (i valori visibili sui tre dadi). Queste triplicità possono essere di tre tipi: quelle *che si compongono da 3 numeri eguali,* che si possono ottenere *in un modo solo*, quelle *che nascono da 2 numeri eguali e dal terzo differente* che *si producono in 3 maniere* (es.: la triplicità: 1.1.2 si può ottenere anche con: 1.2.1 e con 2.1.1) e *quelle che nascono da 3 numeri tutti differenti* che *si formano in 6 maniere* (es.: 1.2.3; 1.3.2; 2.1.3; 2.3.1; 3.1.2; 3.2.1).

Quindi, contando bene, sia il 10 sia l’11 si possono ottenere in ventisette modi diversi (ordinamenti), mentre il 9 e il 12 in soli venticinque modi pur avendo lo stesso numero di combinazioni, ovvero sei:

| | | |
|---|---|---|
| 9 [6,2,1]*6 + [5,3,1] *6 + [4,3,2]*6 + [5,2,2]*3 + [4,4,1]*3 + [3,3,3]*1 | = | 25 ordinamenti |
| 10 [6,3,1]*6 + [5,4,1]*6 + [5,3,2]*6 + [4,4,2]*3 + [4,3,3]*3 + [6,2,2]*3 | = | 27 ordinamenti |
| 11 [6,4,1]*6 + [6,3,2]*6 + [5,4,2]*6 + [5,5,1]*3 + [5,3,3]*3 + [4,4,3]*3 | = | 27 ordinamenti |
| 12 [6,5,1]*6 + [6,4,2]*6 + [5,4,3]*6 + [6,3,3]*3 + [5,5,2]*3 + [4,4,4]*1 | = | 25 ordinamenti |

Ciò dà un leggero vantaggio al 10 e all’11.La probabilità che esca 10 o 11 è 12,5%, che esca 9 o 12 è 11,6%, una piccola ma determinante differenza di percentuali.

Galilei conclude la sua analisi scrivendo:

> *“…da questa tavola potrà ogn’uno che intenda il gioco, andar puntualissima- mente compassando tutti i vantaggi, per minimi che sieno, delle zare, de gl’in- contri e di qualunque altra particolar regola e termine che in esso giuoco si osserva, etc. “*

Una tavola simile a quella creata da Galileo la trovate nella figura riportata sotto:

| DADO 1 \ DADO 2 | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***1*** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ***2*** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ***3*** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ***4*** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ***5*** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| ***6*** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| Combinazione | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequenza | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Tot. Casi | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 |
| Probabilità | **3** | **6** | **8** | **11** | **14** | **17** |

| Combinazione | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| Frequenza | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Tot. Casi | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 |
| Probabilità | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 |

# PASSEGGIATA ALEATORIA

**Postazione disponibile online.**

**Cos'è?** Il gioco consiste nel lancio di una moneta: ogni volta che esce *testa* si fa un passo verso destra, se esce *croce* se ne fa uno verso sinistra. Di quanto ci saremo spostati dopo *n* passi dal punto di partenza – che nel nostro gioco è rappresentato da un lampione? Anche in questo caso l'intuizione ci porta verso una soluzione spesso errata.

**Perché?** Se prendiamo il caso di una passeggiata in una dimensione, poiché ho la stessa probabilità di spostarmi a destra e a sinistra, e.g. 50% di probabilità, lo spostamento medio dall'origine dopo un certo numero *N* di passi è nullo, cioè in media, faccio lo stesso numero di passi a destra e a sinistra. Se però consideriamo la distanza media dall'origine le cose cambiano: supponiamo di partire dalla posizione 0, quanto sarò distante dopo *N* passi? Questa distanza varia ogni volta che ripetiamo l'esperimento, ma se lo ripeto molte volte, posso calcolare la distanza media rispetto alla posizione iniziale.

La statistica ci dice che dopo *N* lanci della moneta, la distanza dall'origine (posizione 0) sarà $\sqrt{N}$ (radice quadrata di N).

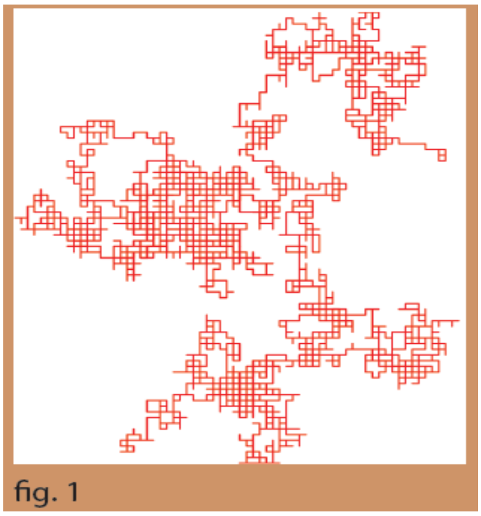



fig. 1 Passeggiata aleatoria in 2 dimensioni con 25'000 passi

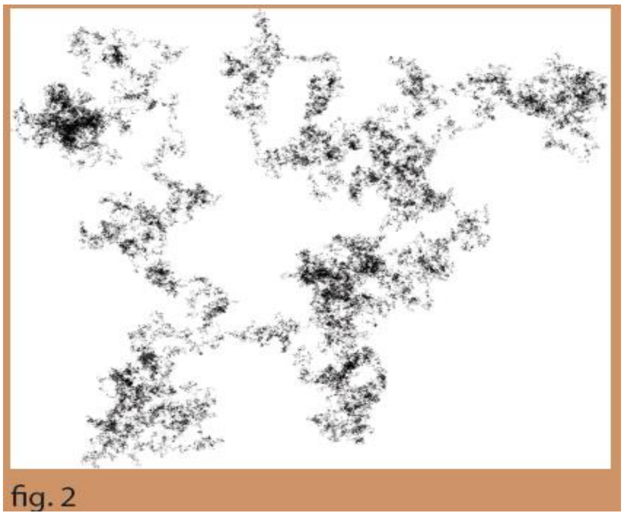



fig. 2 Passeggiata aleatoria con 2 milioni di passi

La passeggiata aleatoria che abbiamo simulato è in una dimensione – si procede a destra o sinistra su una retta – ma il modello si può estendere a due (piano) o tre dimensioni (spazio). Questo tipo di modello si può usare per descrivere il movimento per esempio di una farfalla, di una molecola di gas in una stanza o l'andamento dei ricavi di un titolo sul mercato azionario.

**Curiosità:**Il termine *random walk* fu usato per la prima volta nel 1905 dallo statistico Karl Pearson (1857 - 1936) che ricorda la camminata barcollante e casuale di un ubriaco e, come detto, si adatta a descrivere fenomeni molto diversi.

# IL DADO È TRATTO

**Cos'è?** Il dado è un oggetto di forma poliedrica utilizzato per diversi giochi le cui facce marcate sono usate per generare in modo casuale esiti numerici o di altro tipo. I dadi possono avere forme diverse, possono essere poliedri regolari o irregolari. In un dado regolare tutti i numeri hanno la stessa probabilità di uscire. Il dado cubico è il più diffuso, il tetraedro, a forma di piramide, è il meno usato, l'ottaedro è il più usato dopo il cubo, mentre il dodecaedro (12 facce) e l'icosaedro (20 facce) furono usati nel passato da maghi e fattucchiere nelle loro arti divinatorie.

**Perché?**

1) I dadi sono un ottimo strumento per prendere confidenza con la **definizione di probabilità classica** proposta da Laplace (1749-1827).
   Assumiamo che tutti i casi siano equiprobabili. Per calcolare la probabilità di un evento A:

$$Pr\ (evento\ A)\ =\ casi\ favorevoli\ (al\ verificarsi\ dell'evento\ A)\ /\ casi\ possibili$$

   Es. In un dado cubico, la probabilità che esca un numero *pari* è:
   casi favorevoli = 3; casi possibili = 6;

$$Pr\ (pari)\ =\ 3/6\ =\ 0.5\ =\ 50\%$$

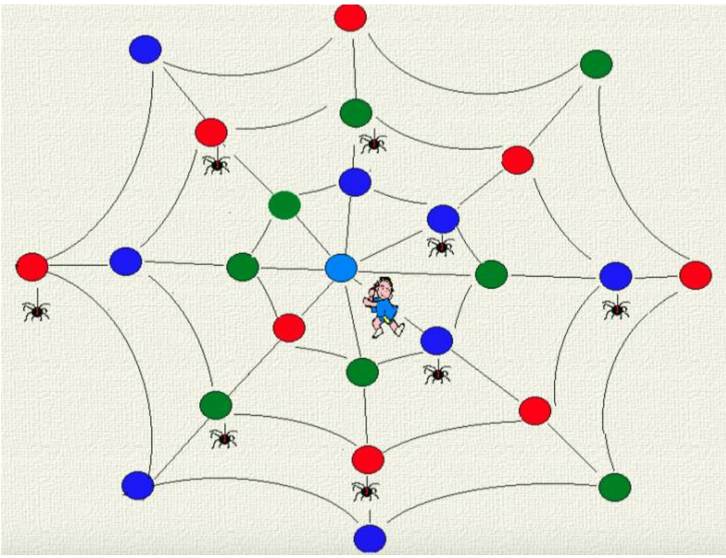
2) Ma se i dadi non fossero regolari? Gli esiti non sarebbero più equiprobabili e quindi non potremmo più utilizzare la precedente definizione. Potremmo però adottare la **definizione diprobabilità frequentista** secondo cui la probabilità di un evento corrisponde a quante volte quest'ultimo si verifica sul totale di un numero di prove – realizzate nelle stesse condizioni - sufficientemente grande al tendere del numero delle prove all'infinito. Ripetiamo quindi il lancio di un dado irregolare molte volte – diciamo cento – e contiamo quando volte otteniamo come risultato

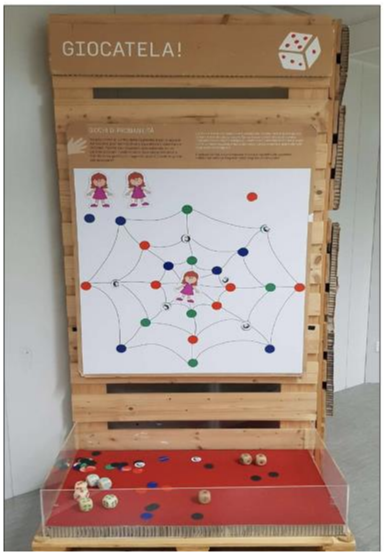
un certo numero – per esempio il numero 3. Se il numero 3 compare 70 volte allora possiamo stimare che la probabilità dell'esito tre è del 70%. La nostra stima sarà tanto più accurata quanto maggiori sono le prove ripetute. Ma attenzione, I lanci del dado devono essere effettuati tutti nelle stesse condizioni.

3) E se non potessi fare prove ripetute in condizioni simili, per esempio, se voglio valutare la probabilità che domani piova? Poiché si tratta di valutare la probabilità di un evento non ripetibile nelle stesse condizioni, possiamo usare la **definizione soggettiva di probabilità**: la valutazione di probabilità di un evento dipende dal grado di fiducia che un individuo ha sul fatto che quell'evento si verifichi sulla base delle informazioni che ha a disposizione [De Finetti (1906-1985) e Savage (1917-1971)].

**Curiosità**: Il cavaliere De Méré (1607-1684) fu un grande giocatore di dadi e fu proprio la sua passione che lo portò a consultare i più grandi matematici del suo tempo, come P. de Fermat e B. Pascal, per sottoporre loro problemi legati al gioco dei dadi. Da questi primi studi nacque il calcolo delle probabilità che tratta fenomeni casuali, i.e. aleatori proprio come il lancio dei dadi – "*alea*" è una parola latina che vuol proprio dire gioco dei dadi.

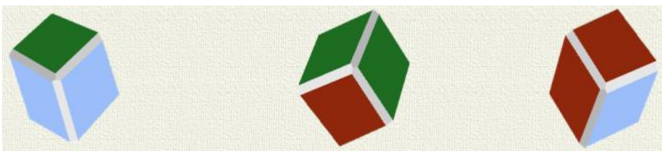
# GIOCATELA






**Come si gioca**: La bimba prigioniera nella ragnatela deve trovare, con il minor numero di passi la via d’uscita. Per fuggire può muoversi lanciando, ad ogni passo, un dado a scelta fra quelli disponibili. Ciascun dado presenta facce colorate con, in generale, due colori distinti presenti in diverse combinazioni. La bimba può muoversi solo su punti collegati alla sua posizione attuale e del colore uscito nel lancio del dado scelto. Può accadere che alcuni esiti del lancio non permettono spostamenti.

**Cosa impariamo**: Strategia ottima nella scelta del dado ad ogni lancio.



# DIAMO I NUM3RI!

# DATI

# STIME

**Come si gioca?** Scopo del gioco è indovinare - ovvero stimare - quanti oggetti ci sono in contenitori di plexiglas trasparenti. Una volta scelto uno dei contenitori (le opzioni sono: palline, cannucce, tappi di sughero, bicchieri di plastica) e fatta la stima, si può vedere contenuto esatto. Viene inoltre mostrata la media e la mediana delle stime fatte dai visitatori della mostra fino a quel momento.
La finestra che si apre inquadrando il QR code di questa postazione è la seguente:
www.din.usi.ch/pages/stime

## APPROFONDIMENTI: MEDIA, MEDIANA E MODA

Media, moda e mediana sono indicatori sintetici che riassumono la tendenza centrale di un insieme di osservazioni.

**MEDIA ARITMETICA:** La media aritmetica si calcola per variabili quantitative ed è il valore che si ottiene sommando i dati numerici tra loro e dividendo la somma ottenuta per il numero dei dati raccolti. Nel linguaggio comune è utilizzata negli ambiti più svariati, dalla temperatura media all'elettore medio, dal salario medio all'uomo medio.

Esempio: se ho le seguenti osservazioni che rappresentano il numero di palline tenute in mano da cinque ragazzi 6,7,9,12,6 la media è $MEDIA\ = \frac{6+7+9+12+6}{5} = \frac{40}{5} = 8$ palline. Se volessi distribuire le palline fra i ragazzi, dandone a ciascuno lo stesso numero e lasciando invariato il totale di palline, dovrei darne 8 ciascuno.
Questa è una importante proprietà della media aritmetica: è quel valore che, sostituito alle singole osservazioni, lascia inalterato il totale.
La media aritmetica rappresenta il baricentro delle osservazioni, ovvero la somma degli scarti dalla media è nulla. Nell'esempio di prima, gli scarti delle osservazioni dalla media sono:

$$6-8\ =\ -2 \qquad 7-8\ =\ -1 \qquad 9-8\ =\ 1 \qquad 12-8\ =\ 4 \qquad 6-8\ =\ -2$$

Sommando gli scarti si ha che $-2\ -1\ +1\ +4\ -2\ =\ 0$

**ALTRE MEDIE**: Ci sono altri tipi di medie, come la media geometrica e la media armonica, che lasciano invariate altre funzioni delle osservazioni (il prodotto e la somma dei reciproci, rispettivamente). Per approfondimenti sulla **media geometrica** dal punto di vista storico si veda il documento Galileo Galilei e la probabilità (di Mario Barra) in cui Galileo si cimenta con il seguente problema:

Un cavallo vale veramente 100 scudi: da uno è stimato 1000 scudi e da un altro 10 scudi: si domanda chi abbia di loro stimato meglio e chi abbia fatto qualche stravaganza nello stimare.

In prima battuta Galileo dice:
"*io corse subito a giudicare più esorbitante la stima dei 1000, come quella alla quale seguiva molto maggiore danno e perdita* ", ma dopo attenti ragionamenti conclude:

"*Le deviazioni dunque delle stime dal giusto <u>si devono giudicare secondo la proporzione geometrica</u>: e così quello che stima una roba la centesima parte di quello che ella vale, è assai più esorbitante stimatore di quella che la stima il doppio o di più; ed in conseguenza <u>egualmente deviano dal giusto quelli due che stimano, uno il doppio di più e l'altro la metà meno, uno il decuplo del giusto, e l'altro la decima parte solamente</u>.* "

Infine, per quanto riguarda la **media armonica**, si consideri questo problema:
La famiglia Brambilla va in vacanza. La velocità media del viaggio all'andata è stata di 50 km/h. La velocità media al ritorno è stata di 25 km/h.
Quale è la velocità media del viaggio ovvero quella velocità costante che avrei dovuto mantenere, sia all'andata che al ritorno, per impiegare lo stesso tempo?
Non è la media aritmetica delle due velocità, ovvero (50+25)/2 = 37.5 km/h bensì 33.3 km/h.
Infatti, se la distanza percorsa per andare in vacanza fosse di 100 km, il tempo impiegato all'andata sarebbe di 2 ore mentre il tempo impiegato al ritorno darebbe di 4 ore. Un totale di 6 ore per percorrere 200 km.
Quindi la velocità media si ottiene facendo spazio totale (200km) diviso per il tempo totale (6 ore) ovvero: 200/6 = 33.3 km/h. Questo valore si ottiene anche facendo la media armonica (ovvero il reciproco della media aritmetica dei reciproci) delle due velocità: 1/ [(1/50+1/25)/2] = 33.33 km/h.

**MEDIANA:** La mediana è il valore che occupa il posto centrale in una serie di dati disposti in ordine crescente o decrescente. La mediana può essere calcolata per variabili quantitative, ma anche qualitative ordinabili (come per esempio, la preferenza per una bibita: non mi piace, mi piace, mi piace molto). Se la serie di dati è costituita da un numero pari di elementi allora non esiste un solo elemento centrale, ma due. In questi casi la mediana è la media aritmetica dei due dati centrali.
Se, per esempio, consideriamo i valori:
6, 1, 5, 2, 3,3, 4, 3, 4, 2, 0,
che corrispondono al numero di caramelle che gli 11 studenti di una certa classe mangiano in un giorno: il primo studente mangia 6 caramelle, il secondo una e così via.
Dopo aver ordinato i dati dal più piccolo al più grande, la serie si presenta così:
0, 1, 2, 2, 3,3, 3, 4, 4, 5, 6;
La mediana è 3 perché il valore che occupa la posizione centrale, ovvero la sesta posizione è pari a 3. Anche la media è 3 infatti il totale delle caramelle mangiate è 33 che diviso per 11 (il numero di studenti), è pari a 3. Se ciascuno studente mangiasse 3 caramelle, il totale delle caramelle mangiate resterebbe invariato.

La mediana è un indicatore della tendenza centrale delle osservazioni più robusto della media rispetto a valori estremi. Supponiamo infatti che, invece del valore 6, magari per errore abbiamo scritto 61, ovvero che le osservazioni ordinate siano
0, 1, 2, 2, 3,3, 3, 4, 4, 5, 61;
la mediana delle osservazioni resta pari a 3.
La media invece cresce perché influenzata dal valore 61. In questo caso il totale di caramelle mangiate diventa pari 88 che diviso per 11 porta ad una media di 8.

Altro esempio: se voglio calcolare l'età mediana di 7 persone le ordino dalla più anziana alla più giovane.
L'età mediana è l'età della persona che, nella sequenza ordinata, occupa la posizione centrale ovvero la quarta posizione. Nell'esempio sotto, l'età mediana è 25 anni.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 anni | 30 anni | 28 anni | **25 anni** | 10 anni | 8 anni | 2 anni |

Il gioco ***la saggezza della folla*** può portare ad un approfondimento relativo al fatto che la mediana è più robusta della media rispetto a valori estremi. Quindi nell'esperimento di Galton con i contadini che ben sanno valutare il peso di un bue, la media riassume bene la saggezza della folla. Nell'esperimento di conteggio/stima delle caramelle, delle palline o dei bicchieri in plastica che facciamo nell'esposizione Diamo i Numeri! è meglio utilizzare la mediana in quanto alcuni bambini - che non sanno bene stimare il numero di caramelle, palline o bicchieri - tendono a dare stime molto più grandi del valore effettivo.

**MODA:** la moda o valore modale di un insieme di dati è quel valore, se esiste, che si presenta con maggiore frequenza. Come dice la parola, la moda è quello che fa la maggior parte delle persone. L'affermazione: "È di moda fra i ragazzi portare i jeans" significa che "la maggior parte dei ragazzi porta i jeans". Se osservo la lunghezza dei capelli dei miei compagni di classe e su 20 studenti ce ne

sono 10 con i capelli corti (a spazzola, ovvero meno di 1 cm), 6 con i capelli lunghi (sotto le spalle) e 4 con i capelli medi, concludo che la moda è portare i capelli corti.
Potrebbe capitare che ci sia più di un valore modale. La moda è una misura ancora più stabile della media e della mediana, cioè non varia quando si aggiungono valori eccezionali. Per esempio, se ho la solita serie 3, 1, 5, 3, 3, 1, 4, 12, 7,6, 13, 2, 5, la moda è 3 e non si modifica se aggiungo un dato uguale a 1000.

# SIMULAZIONI MODELLO

**Premessa** Come possiamo spiegare la relazione che c'è tra fenomeni che variano nel tempo e nello spazio e fare previsioni sulla loro evoluzione? Una strada possibile è quella di costruire modelli che possano rappresentare la realtà, introducendo in questi modelli delle astrazioni che semplificano la complessità del mondo intorno a noi. Questo è quello che fanno gli statistici e gli scienziati dei dati. Il metodo Montecarlo – chiamato così in omaggio alla città dal celebre Casinò – è uno strumento usato per calibrare questi modelli utilizzando i dati disponibili in modo che le previsioni ottenute siano accurate.

**Come si gioca?** Crea una figura irregolare combinando i pezzetti di legno uniti dal velcro e ponila al centro del quadrato rosso che ha lato pari ad 1 m. e quindi area pari ad 1 m$^2$.
Come puoi calcolarne l'area della figura irregolare che hai creato?
Ecco una possibile soluzione: immagina di far cadere all'interno del quadrato rosso una pioggia uniforme di palline da ping-pong: se contando le palline scoprissi che metà di esse è caduta all'interno della tua figura costruita con i legnetti, cosa potresti dedurre della sua area? Che è circa la metà di quella del quadrato.
E se le palline cadute all'interno della figura costruita fossero un terzo di quelli totali? Penseresti che l'area della figura è circa un terzo di 1 m$^2$.
Si tratta di un metodo che fornisce una stima dell'area non un valore esatto. Se voglio aumentare la precisione della mia stima posso usare oggetti più piccoli, per esempio dei ceci o della sabbia al posto delle palline da ping-pong. Naturalmente invece di contare i ceci o i granelli di sabbia il possono pesare.
A questo punto capiamo l'importanza dei computer: un computer opportunamente programmato può simulare la caduta casuale di un elevato numero di ceci, può contare il numero di ceci caduti all'interno della figura irregolare e quelli fuori, così da stimare l'area di una generica figura come opportuna frazione di quella del quadrato esterno che, lo ricordiamo, è pari ad 1 m$^2$.
Fino ad ora abbiamo ragionato con figure piane ma il ragionamento si può estendere anche per solidi irregolari. Pensate ad una fetta di formaggio coi buchi, come possiamo calcolarne il volume? O come possiamo confrontare la capienza del bagagliaio di un'auto *utilitaria* con quello di una *station wagon*? Potremmo calcolare il numero di valigie che può contenere ciascun bagagliaio (le valigie giocano qui il ruolo delle palline da ping-pong) e se volessimo aumentare la precisione della nostra valutazione (stima) potremmo sostituire le valigie con palline da tennis … ora non pensate di riempire il bagagliaio dell'auto dei vostri genitori con dei ceci o, peggio ancora, con della sabbia, per stimarne la capienza – non sarebbero molto contenti!

**Strategia**: Si riempie il quadrato rosso (e di conseguenza anche l'area delimitata dai legnetti) con uno strato di palline. Si contano le palline (si pesano i ceci o la sabbia se vogliamo delle stime più precise) dentro che il quadrato rosso (compresi quelle dentro la figura). Indichiamo questo valore con X. Si contano poi solo le palline dentro la figura delimitata con i legnetti. Indichiamo questo valore con Y. Una semplice proporzione porterà ad una stima dell'area.

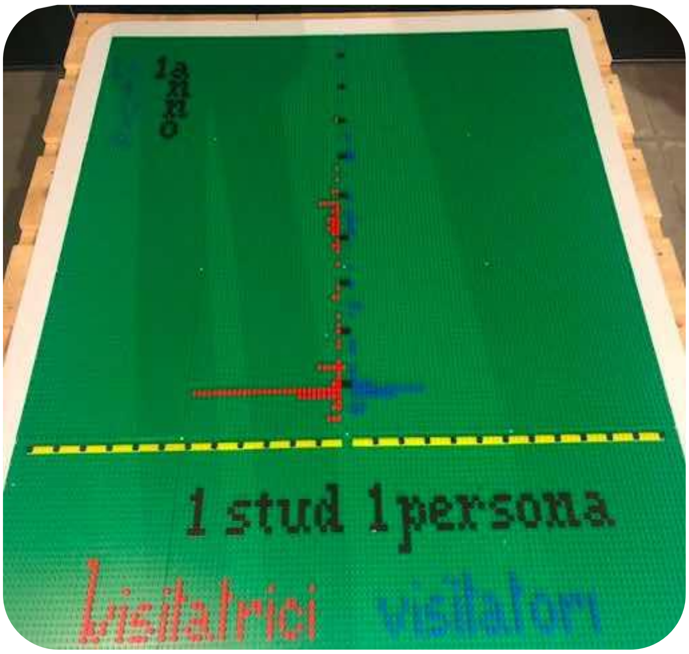
**Per esempio**, immaginiamo che nel quadrato stiamo esattamente 100 palline. E immaginiamo che i legnetti delimitino esattamente ¼ dell'area interna al quadrato. Dentro il perimetro dei legnetti staranno quindi circa 25 palline. L'area corrispondente, indicata con A, è quindi ottenuta risolvendo la proporzione:

$$25 : 100 = A : 1 m^2$$

quindi

$$A = 25/100 \times 1 \ m^2 = 0.25 \ m^2$$

# LA PIRAMIDE DELLE ETÀ


Alla mostra "Diamo i numeri!" l'Istat è presente con una postazione dove giocare con i dati demografici e confrontare la piramide delle età della popolazione italiana con quella dei visitatori della mostra. Vediamo alcune domande che sorgono spontanee:

- Quanti sono i bambini e le bambine delle generazioni più recenti?
- Quante persone in Italia hanno più di novant'anni?
- Nascono più bambine o bambini?
- Ci sono più anziani o anziane?
- Qual è la classe di età più numerosa?
- E i visitatori della mostra sono uguali o diversi alla popolazione italiana per quanto riguarda a età e genere?
- Fra i visitatori della mostra possiamo aspettare più ragazzi di ragazze?
- E chi li accompagna più di frequente? Persone adulte come mamma e papà o docenti, o ragazzi giovani come fratelli maggiori, o ancora nonni più avanti con gli anni?

Ad alcune di queste domande si può cercare risposta nelle piramidi delle età.

La postazione è costituita da:

- Piramide delle età dell'Italia nel 2018 costruita con mattoncini lego
- Piramide delle età dei visitatori della mostra costruita con mattoncini lego

Che cos'è la Piramide delle età

La Piramide delle età è la rappresentazione grafica della distribuzione per età e genere di una popolazione. È costituita da due grafici a barre ruotati in modo da condividere la stessa base verticale al centro del grafico: quello a sinistra rappresenta la distribuzione per età della popolazione femminile e quello a destra la distribuzione per età della popolazione maschile. Lungo l'asse verticale sono indicate le età in anni compiuti (1 bottoncino = 1 anno) e sull'asse orizzontale sono riportate le frequenze assolute di uomini e donne (1 bottoncino = 10 mila persone nella piramide Italia, 1 bottoncino = 1 persona nella piramide visitatori), corrispondenti a ciascuna età considerata. Dalla forma della piramide è possibile trarre indicazioni sia sui fattori che caratterizzano la struttura per età e genere della popolazione attuale, sia sull'evoluzione passata. Sono possibili anche previsioni per un arco di tempo non superiore a un secolo.

Tali indicazioni possono essere tratte analizzando i seguenti elementi della piramide:

- **la base**: fornisce indicazioni circa il flusso delle nascite: se si allarga, si ha un flusso di nascite in forte aumento; se si restringe significa che il flusso delle nascite è in diminuzione.
- **l'inclinazione dei lati**: fornisce indicazioni circa il livello generale di eliminazione per morte: se l'obliquità dei lati è forte, si ha un'alta mortalità; se è debole, si ha una bassa mortalità.
- **la presenza di rigonfiamenti o strozzature per particolari classi d'età**: fornisce indicazione dell'intervento di particolari fattori di perturbazione, ad esempio come accaduto durante le guerre mondiali.

**LA PIRAMIDE DELLE ETÀ DELL'ITALIA NEL 2018**

La struttura per età e genere della popolazione dell'Italia nel 2018 ha perso la caratteristica forma piramidale, tipica delle popolazioni ad alta natalità e ad alta mortalità, come l'Italia prima della transizione demografica e come molti Paesi in via di sviluppo ancora oggi. La distribuzione della popolazione italiana nel 2018 presenta una caratteristica forma a "trottola", con la parte inferiore, corrispondente alla popolazione giovane, più sottile, un pesante corpo centrale corrispondente alla popolazione adulta nata intorno agli anni Sessanta, e un secondo affinamento nella parte superiore in corrispondenza della popolazione anziana, dove è particolarmente evidente un'asimmetria di genere a favore della componente femminile, più longeva. Si tratta pertanto di una popolazione in fase di invecchiamento, caratterizzata da natalità bassa e in riduzione e da bassa mortalità che aumenta la sopravvivenza anche ad età avanzate.

**LA PIRAMIDE DELLE ETÀ DEI VISITATORI DELLA MOSTRA**

Ogni visitatore inserisce il proprio bottoncino nella Piramide delle età dei visitatori, posizionandolo in corrispondenza della propria età in anni compiuti, a sinistra (la parte rossa) bambine, ragazze e donne, e a destra (la parte blu) bimbi, ragazzi e uomini.

In questo modo si otterrà la distribuzione per età e genere dei visitatori. Hanno visitato la mostra più gli uomini o più le donne? Più i giovani, gli adulti o gli anziani?

Il tablet contiene 2 siti navigabili, 2 video e 1 documento:

1. **World Population Prospects delle Nazioni Unite**: rappresentazioni grafiche dei profili demografici di tutti i Paesi del Mondo. (https://population.un.org/wpp/Graphs/DemographicProfiles/)
2. **Le Piramidi della popolazione mondiale e di tutti i Paesi del Mondo dal 1950 al 2100** (https://www.populationpyramid.net/it/mondo/2060/)
3. **La Piramide delle età della popolazione italiana in evoluzione dal 1972 al 2061** (http://www.istat.it/it/files/2011/05/piramide.wmv)
4. **La Piramide delle età della popolazione italiana dal 2011 al 2065 con evidenziata la componente di stranieri residenti e di popolazione in età lavorativa**
5. Il comunicato stampa**Il futuro demografico del Paese al 2065.** Previsioni regionali della popolazione residente al 2065 (https://www.istat.it/it/files//2018/05/previsioni_demografiche.pdf)

# CATTURA-RICATTURA

**Le origini storiche del metodo cattura e ricattura**

Il primo a utilizzare il metodo fu, nel 1802, Pierre Simon Laplace per stimare la popolazione della Francia, sulla base di una sua stima dei nati in Francia in un certo anno e dei nati e residenti in alcune comunità francesi, particolarmente ordinate e accurate nella gestione amministrativa.

Per una seconda applicazione documentata bisogna attendere quasi un secolo, il 1896, quando il biologo marino danese Johannes Petersen, stimò la presenza numerica, in un determinato tratto di mare, della platessa.

La formula di stima di popolazione tramite il metodo di cattura e ricattura è nota anche come "Stima di Lincoln-Petersen" o "Stima di Chapman".

**Come funziona il metodo cattura e ricattura?**

Il "metodo statistico cattura e ricattura" in inglese ***capture-recapture*** o anche ***capture-mark-recapture***, è un metodo statistico utilizzato nelle scienze biologiche per stimare la dimensione o l'abbondanza di una popolazione animale o di un altro gruppo biologico in un ambiente naturale. Questo metodo è spesso impiegato per stimare il numero di individui di una specie quando è difficile contarli direttamente. È ampiamente utilizzato in ecologia e biologia della conservazione.

La metodologia di cattura e ricattura si basa su un processo in cui gli animali vengono catturati, marcati (ad esempio, con una marcatura non dannosa come un segno o un braccialetto) e poi rilasciati nel loro ambiente naturale. Successivamente, si catturano nuovamente alcuni animali e si registra il numero di individui marcati tra quelli catturati. Questa informazione viene quindi utilizzata per stimare la popolazione totale.

Il metodo viene utilizzato anche in Medicina, per stimare quanti individui siano affetti da una determinata patologia, ad esempio il diabete.

**Le basi statistiche del metodo**

Proviamo a ripercorrere la stima effettuata da Petersen nel 1896.

- Nel tratto di mare che ci interessa ci saranno un numero di platesse **N**, non noto a priori.
- Percorriamo il tratto in questione, pescando nella rete **n** platesse. Le marchiamo in qualche modo indelebile e le ributtiamo in mare.

- Lasciamo qualche giorno alle platesse catturate il primo giro, per riprendersi dallo spavento e tornare alla vita di tutti i giorni, ed effettuiamo un secondo giro di pesca. Questa volta cattureremo **K** platesse
- tra queste, ne troveremo alcune, **k**, marcate al primo giro.

Per ragionare sui numeri che abbiamo raccolto, occorre ipotizzare alcune condizioni ideali:

- prima ipotesi: che la popolazione delle platesse in quel tratto sia **chiusa**, cioè che sia rimasta invariata nei giorni trascorsi tra la prima e la seconda cattura, quindi senza nascite, senza morti e senza *immigrati* ed *emigrati*;
- seconda ipotesi: che gli individui abbiano una uguale probabilità di essere catturati e poi ricatturati; il criterio di cattura non deve quindi privilegiare in alcun modo particolari caratteristiche degli individui;
- terza ipotesi: che la marcatura non alteri il comportamento degli individui marcati; quindi, ad esempio, che l'esperienza vissuta non li renda più guardinghi, spingendoli a evitare una successiva ricattura.

**Ma allora, quante sono le platesse?**

A questo punto si può ipotizzare che il campione ricatturato sia rappresentativo dell'intera popolazione. Quindi la frazione di platesse marcate rispetto all'intera popolazione di platesse ($\boldsymbol{n} \,/\, \boldsymbol{N}$) si può assumere uguale alla frazione delle platesse ricatturate che risultano marcate ($\boldsymbol{k} \,/\, \boldsymbol{K}$). Basta allora risolvere l'equazione nell'incognita **N**:

$$N = \frac{n \cdot K}{k}$$

Un esempio. Si supponga che al primo giro si catturino 100 platesse (**n = 100**), che vengono marcate e ributtate in mare con delicatezza. Al secondo giro si peschino ancora 100 platesse (**K = 100**) di cui 5 risultino marcate (**k = 5**).

La stima del numero **N** di platesse in quel tratto di mare è quindi:

$$N = \frac{100\ x\ 100}{5} = 2.000$$

Si tratta di una stima e non di un valore esatto, evidentemente, perché si utilizza un metodo statistico di campionamento. Quanto sia verosimile la stima dipende sia da quanto sono realistiche le tre assunzioni fatte, sia dal numero di individui esaminati. Esistono raffinamenti del metodo per migliorare la verosimiglianza del risultato, anche in presenza, ad esempio, di una popolazione non chiusa, ma il metodo restituisce comunque una stima.

**Nella postazione alla mostra**

**Come si gioca**: L'obbiettivo è stimare il numero di palline da ping-pong bianche in un contenitore con palline bianche e gialle. Si possono prendere delle manciate successive. Viene messa a disposizione una matita.

**Strategia**: Nella prima manciata di segnano con una x a matita tutte le palline bianche selezionate. Si rimettono poi nel contenitore e si mescolano le palline. Nella seconda manciata si contano quante palline marcate con la x sono state nuovamente selezionate. Di nuovo una proporzione permette di stimare il numero di palline bianche.

**Altre risorse esterne**:
https://olmo.deib.polimi.it/ecologia/dispensa/node30.html

# CONTATORI

Dal sito http://www.worldometers.info abbiamo comprato i 4 contatori i seguenti contatori:

1) Popolazione mondiale
2) Spesa pubblica mondiale (in USD) per l'istruzione oggi
   ("oggi" inizia alla mezzanotte dell'orologio del calcolatore su cui il contatore è installato)
3) Ettari di foresta distrutti dall'inizio dell'anno
4) Giorni mancanti al termine delle riserve di petrolio

Su questo sito potete trovate vari altri contatori e potete fare confronti interessanti.
Per esempio, la spesa per istruzione al mondo è meno di quella per la salute e circa il doppio di quella per la spesa militare.

Ecco alcune informazioni sulla spesa per istruzione in Italia
https://www.ilsole24ore.com/art/notizie/2017-08-29/italia-terzultima-europa-spesa-istruzione-germania-spende-doppio-190050.shtml?uuid=AE8jEVJC

# MACCHINE CHE ANALIZZANO IMMAGINI

*Daniele Schicchi e Domenico Amato*
*Studenti di dottorato in Matematica e Scienze Computazionali*
*Dipartimento di Matematica e Informatica*
*Università degli studi di Palermo*

Al giorno d'oggi sono sempre più diffusi sistemi di Intelligenza Artificiale in grado di analizzare immagini emulando i comportamenti tipici della visione umana. Tali sistemi riescono a dare supporto ad una grossa varietà di applicazioni come *l'analisi e il riconoscimento dei volti, sistemi di guida robot, videosorveglianza, ispezioni aree tramite Unmanned Aerial Vehicles (UAV), etc*. L'esibizione mostra un sistema di Intelligenza Artificiale che analizzando un video rileva la presenza di un volto ed attraverso una serie di operazioni di controllo sulla sua base di conoscenza è in grado di associare al viso rilevato un'identità che verrà mostrata a schermo. Qualora il sistema non abbia informazioni sul volto esaminato etichetterà l'individuo come *sconosciuto*. Si vuole porre l'attenzione su come sia sufficiente solo *un elaboratore, una fotocamera* e la conoscenza di un linguaggio di programmazione come *Python* e della libreria *face_recognition*[1] per implementare il proprio sistema di riconoscimento facciale. I sistemi in grado di riconoscere autonomamente un volto rappresentano una tecnologia, studiata fin dal lontano 1965, ma continuamente perfezionata nel corso degli anni al punto da diventare di uso comune. Il basso tasso di errore di tali tecnologie ha permesso il loro utilizzo in svariati contesti agendo sul cambiamento del nostro modo di vivere, infatti, comunemente è possibile osservare l'utilizzo del volto come chiave per sbloccare lo *smartphone* o per accedere alla nostra area personale bancaria, si ha la possibilità di ricercare sull'intero Internet un viso di cui vogliamo ricevere informazioni e molti Social Network sono in grado di avvertirci quando appariamo su una foto caricata da un altro utente. Un tale avanzamento tecnologico porta con te una serie di lati positivi e lati negativi su cui il visitatore è invitato a riflettere. Si stimano circa 245 milioni di videocamere di sorveglianza installate nel mondo e con la precisione dei sistemi di riconoscimento facciale dei giorni d'oggi una macchina potrebbe, per esempio, tracciare facilmente gli spostamenti di qualsiasi individuo potenzialmente attaccando la sua *privacy*. Esistono software in grado di riconoscere il volto di una persona tra quello di migliaia in meno di un secondo e questo riconoscimento viene spesso fatto nella totale inconsapevolezza degli individui.

Più in dettaglio un Sistema di riconoscimento dei volti è una tecnologia capace di identificare una persona a partire da un'immagine o un video. Il sistema analizza le immagini che vengono acquisite dal sistema di acquisizione dell'immagine/video pixel per pixel andando alla ricerca di forme che suggeriscano la presenza di un volto. Il suo funzionamento si basa su Algoritmi che estraggono le caratteristiche del volto individuato nell'immagine di input e successivamente le confronta con quelle estratte dal viso presente all'interno di un'altra immagine. Alcune di queste caratteristiche potrebbero essere, per esempio, *la posizione, la dimensione e la forma degli occhi, la distanza tra naso e bocca, la dimensione del viso*. Le informazioni estratte verranno elaborate tramite l'uso di funzioni matematiche che permetteranno al sistema di capire quanto due insiemi di caratteristiche si differenzino riuscendo a riconoscere un viso noto. Se le differenze riscontrate sono trascurabili si potrà ragionevolmente presumere che i due volti appartengono alla stessa persona.

# SALA VIDEOPROIEZIONI

In questa sala ci sono 4 video:

- uno prodotto dal CSCS – Centro Svizzero di Calcolo Scientifico
- due prodotti da ISTAT
- uno prodotto dalla Prof.ssa Antonietta Mira in collaborazione con Paolo Zanocco e Ilaria Curti intitolato Angels of Big Data.

Angels of Big Data illustra le opportunità e le paure che i big data (grandi masse di dati che noi stessi generiamo nel momento in cui affidiamo le nostre vite alla tecnologia) generano.

A questo link trovate una conferenza della Prof.ssa Antonietta Mira sui temi illustrati del video.
https://www.youtube.com/watch?v=kItlFRDF5XU
https://www.brainforum.it/video/big-data-lombra-inquietante-del-grande-fratello/
https://www.youtube.com/watch?v=T1eH2yhjHZc

I due video ISTAT sono visionabili a questi link:
il primo è per gli adulti: https://youtu.be/OSGs1FVhkpY.
Il secondo è per i ragazzi: https://youtu.be/awdHmoWyFuE.

Questo è il sito del Centro Svizzero di Calcolo Scientifico (CSCS) che ha prodotto uno dei video della sala cinema:
https://www.cscs.ch/about/about-cscs/

# DIAMO I NUM3RI!

# STORIE DI NUMERI

# STORIA DI URI

Questa è una storia accaduta tanto tempo fa in un villaggio in Mesopotamia, dove viveva il popolo dei Sumeri dei quali era parte il piccolo Uri. Fra i rumori e i suoni che venivano dal villaggio si poteva ogni tanto distinguere un richiamo: - Uri! Uri! Era la mamma che aveva qualche commissione per lui: - Mi servono delle ricotte. - Sì mamma. Quante? - A quei tempi gli uomini ancora non sapevano né leggere né scrivere. Sapevano contare un pochino, aiutandosi con le dita delle mani, non tanto però e non bene come noi. La mamma allora mostrava con le dita quante ricotte voleva. Con la sua manina Uri ricopiava con attenzione il gesto della mamma e ... via di corsa! E con la cesta piena Uri tornava a casa a depositare le ricotte per poi scappare a giocare fino al prossimo richiamo.

- Uri! Uri! - Sì mamma? - Delle uova. - Quante? Uri si avvicinava per sistemare una ad una le sue piccole dita come la mamma mostrava e poi... via di corsa! Mentre Uri correva lungo il sentiero ecco passare una splendida farfalla e con due agilissimi salti Uri l'acchiappa; sollevando le braccia verso il cielo Uri si ferma un istante a guardare la farfalla che si allontana dalle sue mani e ... - O nooo! Le mani! Già: e ora? Uri doveva tornare dalla mamma a vedere di nuovo quante uova occorrevano. La mamma allora mostrava di nuovo le dita e Uri di nuovo partiva. Ma o per una farfalla colorata o per un bellissimo sasso luccicante, le volte che Uri riusciva ad arrivare dov'era diretto senza perdere il conto erano davvero poche. Qui ci voleva un'idea. Un pomeriggio che Uri stava al solito rimestando con le mani nell'argilla della riva, l'idea arrivò. - Ma certo, basta che le dita me le faccia di argilla e le userò per contare e finalmente avrò le mani libere per giocare! Ora, quando la mamma gli mostrava quante misure di orzo occorrevano, metteva un conetto accanto ad ogni dito teso della mamma, li raccoglieva tutti dentro la bolla e ... via di corsa!

Una volta, sarà forse perché si avvicinava il tempo della grande festa del villaggio, la mamma chiese a Uri di portarle dita e dita e dita e ancora dita di datteri maturi. Tutte queste dita iniziavano a essere ingombranti e Uri non poteva più saltellare tranquillamente qua e là.

Pensa e ripensa, un caldo pomeriggio mentre Uri si trovava sulla riva del fiume a impastare nuove dita l'idea arrivò: invece di tutte queste dita farò delle palle. Così rimpastò l'argilla formando tante belle palline non troppo grandi perché non pesassero. Da quel momento ogni volta che nelle dita dei suoi conti Uri riusciva a mettere insieme due mani piene le faceva sparire e al posto metteva una pallina. Uri adesso se ne partiva con il suo piccolo mucchietto di tre o quattro testoline più qualche dito sciolto.

Ma le difficoltà non finivano mai: che dire di quando gli prendeva la voglia improvvisa e impellente di fare una capriola? Se non si fosse trattenuto sarebbero stati di nuovo guai: conetti e palline sparsi ovunque.

Pensa e ripensa, un'altra idea arrivò. - Ma certo! Farò delle grandi palle in argilla morbida, schiacciate poi come focaccine. Lì ci farò le impronte dei sassolini che lascerò a casa nella bolla. Solo le impronte! Così Uri tra salti e capriole poteva lanciare in aria e riprendere il pannetto d'argilla senza più preoccupazioni.

I problemi però non finivano mai. Se Uri era adesso più grandicello anche le commissioni della mamma erano più difficili. E così aveva bisogno di noci, di fichi, di ciotole di latte e di sacchi di farina, subito, tutti insieme e naturalmente ogni cosa aveva il suo numero di dita. Come fare? Portarsi un

panetto per ognuno? Addio mani libere! E poi come ricordarsi quale panetto era per le noci piuttosto che per il latte o i fichi o la farina? Qui ci voleva un'idea. Pensa e ripensa una sera al tramonto, mentre Uri sedeva lungo la riva del fiume, grattando l'argilla con dei piccoli rametti, l'idea arrivò. - Ma certo disegnerò sul mio panetto le noci, i fichi, il latte, la farina e ... accanto i sassolini. Scelto un bello stecco dritto Uri scrisse, udite bene per la prima volta scrisse, quello che la mamma gli aveva chiesto. Questa era stata davvero ma davvero una gran bella idea. Da quel giorno fino ad oggi le cose sono un po' cambiate. Oggi abbiamo le lettere, i numeri, la carta e le penne. Ma se quella sera l'idea di Uri non fosse arrivata? Chissà.
Intanto con i suoi panetti Uri, divenuto ormai grande, se la cavava benissimo in tutte le commissioni. Ora non solo la mamma, ma tutti, perfino gli aiutanti del re e il re stesso in persona, si rivolgevano a Uri quando c'era qualcosa da contare.

Tratto da: *Uri, il piccolo sumero* di Raffaella Petti, 2009, Il Giardino di Archimede.

# IL TRIONFO DELLO ZERO

C’era una volta
un povero Zero
tondo come un o,
tanto buono ma però
contava proprio zero
e nessuno lo voleva in compagnia
per non buttarsi via.
Una volta per caso
trovò il numero Uno
di cattivo umore perché
non riusciva contare
fino a tre.
Vedendolo così nero
il piccolo Zero
si fece coraggio,
sulla sua macchina
gli offerse un passaggio,
e schiacciò l’acceleratore,
fiero assai dell’onore
di avere a bordo
un simile personaggio.
D’un tratto chi si vede
fermo sul marciapiede?
Il signor Tre che si leva il cappello
e fa un inchino…
E poi, per Giove,
il Sette, l’Otto, il Nove
che fanno lo stesso.
Ma cosa era successo?
Che l’Uno e lo Zero
seduti vicini,
uno qua l’altro là
formavano un gran Dieci:
nientemeno, un’autorità!
Da quel giorno lo Zero
fu molto rispettato,
anzi da tutti i numeri
ricercato e corteggiato:
gli cedevano la destra
con zelo e premura,
(di tenerlo a sinistra
avevano paura),
lo invitavano a cena,
gli pagavano il cinema,
per il piccolo Zero
fu la felicità.

Tratto da: *Il trionfo dello zero* di Gianni Rodari, 2011, Emme Edizioni.

# IL PROBLEMA DEL QUATTRO

Un giorno il numero quattro si stancò di essere pari. I numeri dispari, pensava, sono molto più allegri e spiritosi. E si stancò di quella sua forma un po' insipida, a sediolina. E si stancò di essere due più due, che tutti lo sanno, e anzi quando tutti vogliono dire una cosa che tutti sanno dicono: Quanto fa due più due?
Guarda il sette, si diceva, così svelto ed elegante, e il tre così tondo e arguto. Sognava di essere un numero dispari, come il tre, come il cinque, come il sette.

Un problema così il quattro non sapeva risolverlo. Forse non aveva neanche una soluzione. Se ce l'aveva però, il Grande Matematico doveva conoscerla. Così il quattro andò dal Grande Matematico e gli espose il suo caso. Il grande Matematico sorrise. Anche lui una volta avrebbe voluto essere diverso: non un altro, ovviamente, perché voleva rimanere se stesso, ma un po' più simile al Grande Musicista, o al Grande Regista, o al grande Tennista. Anche lui, quindi, aveva avuto il problema del quattro e sapeva come affrontarlo.

Lo fece accomodare per terra (una sedia sarebbe proprio stata inutile) e cominciò a parlargli. - Vedi, quattro – disse – non c'è bisogno di diventare diverso, di diventare dispari per esempio, oppure lungo e difficile. Non c'è bisogno perché tu sei già diverso e unico anche se non te ne rendi conto. A te sembra di essere una stupida sediolina che fa due più due e tutti lo sanno, e invece ci sono cose in te che nessun altro ha, cose molto speciali. Per esempio, tu sei due più due, ma anche due per due e anche due alla seconda. E questo è un fatto del tutto straordinario. Tre più tre non è anche tre per tre e tanto meno tre alla terza! E poi tu che tanto ammiri il tre, non ti rendi conto che esso è già dentro di te, perché è vero che tu sei due più due, ma è anche vero che tu sei tre più uno, i primi numeri dispari di tutta l'infinita catena numerica. –

A quel punto il numero quattro si sentiva abbastanza confuso e anche un po' turbato, perché quella faccenda di avere già in se ciò che cercava all'esterno gli sembrava una cosa davvero importante e su cui pensarci su. Pregò il Grande Matematico di smettere e se ne andò. Da allora il numero quattro ha capito di contare molto più di quel che credeva e ogni giorno scopre di essere sempre diverso e di piacersi così.

Tratto da: *Filosofia in cinquantadue favole* di Ermanno Bencivenga, 2011, Mondadori.

*"La fortuna non esiste: esiste il momento in cui il talento incontra l'opportunità"*

Seneca (4 a.C. – 65 d.C.)

# STATISTICA O FORTUNA?

# UN MODO PER VINCERE GIOCANDO A DADI.

**G. Bartolomei* O. Giambalvo****
* Liceo Scientifico "Benedetto Croce" Palermo
**Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche, Università di Palermo

Il lavoro descrive l'esperienza di una attività prevista dal Piano Nazionale Lauree Scientifiche (PLS) svolta presso il liceo Scientifico Benedetto Croce di Palermo. Si tratta di una attività con il duplice scopo di favorire la conoscenza della Statistica ai giovani studenti e orientarli verso una scelta del percorso formativo universitario più consapevole.

## Il Perudo: Dal gioco alla Statistica. Quando i dadi non contano

Il Perudo è un gioco da tavolo basato sui dadi originario del Perù – da cui il nome – risalente all'epoca degli Incas. In verità vanta origini di vario genere, anche presso molti popoli Indiani del Nord America. Dal Perù sarebbe giunto in Spagna, per poi diffondersi nel resto del mondo, nel XV secolo, attraverso i Conquistadores. Deve la sua celebrità al film "I Pirati dei Caraibi – La maledizione del forziere fantasma sulla nave Olandese Volante". Alcuni protagonisti quali Sputafuoco Bill, Davy Jones, Will Turner per decidere la permanenza di quest'ultimo sulla misteriosa nave affidano la decisione al vincitore del gioco ritenuto, proprio in virtù del fatto che sia risultato vincente al gioco, abile nel ragionamento e nella deduzione.
Qui viene descritto come esempio per recuperare l'utilità del pensiero statistico (che permette – fortuna permettendo – di vincere al gioco) che emerge quasi inconsapevolmente fra i giocatori. L'esempio è riportato perché in aula si può procedere con il gioco fra gli studenti e seguire un approccio di *brain storming* per verbalizzare e focalizzare tutti i concetti e le informazioni statistiche possedute o da veicolare.

Lo scopo del gioco è rimanere l'ultimo giocatore della partita con almeno un dado. I giocatori possono essere da 2 a 6. Ogni giocatore ha a disposizione un bussolotto con 5 dadi. Nei dadi sono raffigurate le facce da 2 a 6. La faccia numero uno è sostituita dalla faccia di Inca o di lama.

Si inizia con un bussolotto con cinque dadi a testa. I dadi vengono mescolati tutti insieme ed ogni giocatore guarda i propri dadi senza mostrarli agli avversari. Il gioco vero e proprio consiste in una serie di scommesse al rilancio sul numero di dadi totale (occorrenze) con lo stesso valore (la stessa faccia del dado) tra tutti i giocatori.

A turno il primo giocatore, dopo aver visto il risultato dei propri dadi, dichiara una scommessa su un valore del dado ritenuto più frequente e sulle occorrenze di tale valore. Il giocatore di mano deve prima decidere se vuole rilanciare con una scommessa diversa o vuole valutare la scommessa del giocatore precedente. Le dichiarazioni/scommesse si basano sull'evidenza dei propri dadi e sulle dichiarazioni dei giocatori precedenti. Seguendo tali dichiarazioni, è possibile ipotizzare la presenza nel tavolo di un certo numero di dadi con un certo valore.

Prima di fare la scommessa, è necessario che si tenga presente:

a) quanti dadi in totale ci sono in gioco. Ad ogni turno, man mano che il gioco va avanti, i dadi vengono persi e quindi eliminati dal gioco. Nel momento in cui i giocatori perdenti perdono anche i dadi, i giocatori più esperti e attenti saranno in grado di ricordarsi esattamente quanti ne sono rimasti in gioco, e fare così le loro scommesse/ipotesi con maggiore precisione e accuratezza;
b) tutte le teste dell'Inca o di lama valgono come Jolly. Questo rende ancora più difficile fare delle ipotesi verosimili e quindi vincenti.

Il giocatore successivo può rilanciare la scommessa con un'occorrenza più alta sullo stesso valore del dado o con la stessa occorrenza ma con un valore del dado diverso, rispetto al giocatore precedente. Per esempio, se il primo giocatore ad inizio del gioco dichiara:
**10-5** sta indicando che sulla base dei sui dadi (gli unici ad essere da lui noti perché visualizzati) generalizza che fra tutti i giocatori ci sono 10 dadi con la faccia n.5.

Nel primo caso, può effettuare la sua ipotesi partendo dal 10-5 e quindi può:

a) scommettere su 10-x dove x è una delle face dei dadi diversa da 5;
b) scommettere su un numero maggiore di 10-5 (ad esempio 11-5),
c) infine può dimezzare il numero 10 e scommettere 5-lama, cioè il jolly.

Nel secondo caso, il giocatore di mano può valutare della scommessa fatta dal giocatore che l'ha preceduto. In tal caso viene detto *Dubito* se la sommessa è considerata falsa; oppure può ritenere la scommessa esatta: in tal caso dirà *Calza*.

In generale dire *Calza* significa affermare che la dichiarazione precedente è esatta. Se la dichiarazione è esatta il giocatore che calza acquista un dado e quello che viene sfidato lo perde, in caso contrario è il giocatore che ha calzato a perderlo;
Dire *Dubito* significa dire che la dichiarazione precedente non è vera poiché il numero di dadi effettivi si ritiene inferiore al numero di quelli dichiarati.

Se la dichiarazione è esatta il giocatore che viene sfidato perde un dado, in caso contrario è il giocatore che ha dubitato a perderlo.

Nel momento in cui un giocatore avrà detto Dubito (in caso di scommessa ritenuta troppo azzardata) o Calza (in caso di scommetta ritenuta congrua), tutti i giocatori sono tenuti a scoprire i propri dadi e si verifica la veridicità dell'ultima dichiarazione/scommessa. Si può scommettere sulle teste dell'Inca o di lama in qualsiasi momento del gioco dividendo per due l'ultima occorrenza scommessa.
Se il giocatore di mano avrà preferito formulare un'ipotesi, il gioco passa al giocatore successivo che si trova nelle stesse condizioni del giocatore precedente.
Quando un giocatore rimane per la prima volta nel gioco con un solo dado ci si dichiara *palifico*. In questo caso il palifico avrà diritto a cominciare il giro di scegliere il valore su cui scommettere per l'intero round che, pertanto non si potrà cambiare. Durante il giro le teste di lama non valgono come Jolly. È possibile dichiararsi *palifico* una sola volta nell'intera partita.
Ogni giro termina con la perdita del dado da parte del giocatore che ha sbagliato la dichiarazione o che ha sbagliato a dubitarne oppure con la conquista del dado da parte del giocatore che ha individuato il numero esatto di occorrenze e valore dicendo calza. Nel primo caso il giro successivo comincia con la scommessa del giocatore che ha perso il dado, altrimenti si procede in senso orario. Inizia chi ha calzato se la sua dichiarazione è risultata vincente.

Di seguito la formalizzazione dei passi e delle decisioni da prendere.

$$\mathrm{d} = \text{dichiarazione}$$

$$\mathrm{F_i} = \text{dadi sul tavolo}$$

$$\mathrm{f} = \text{dubito}$$

$$\mathrm{v} = \text{calza}$$

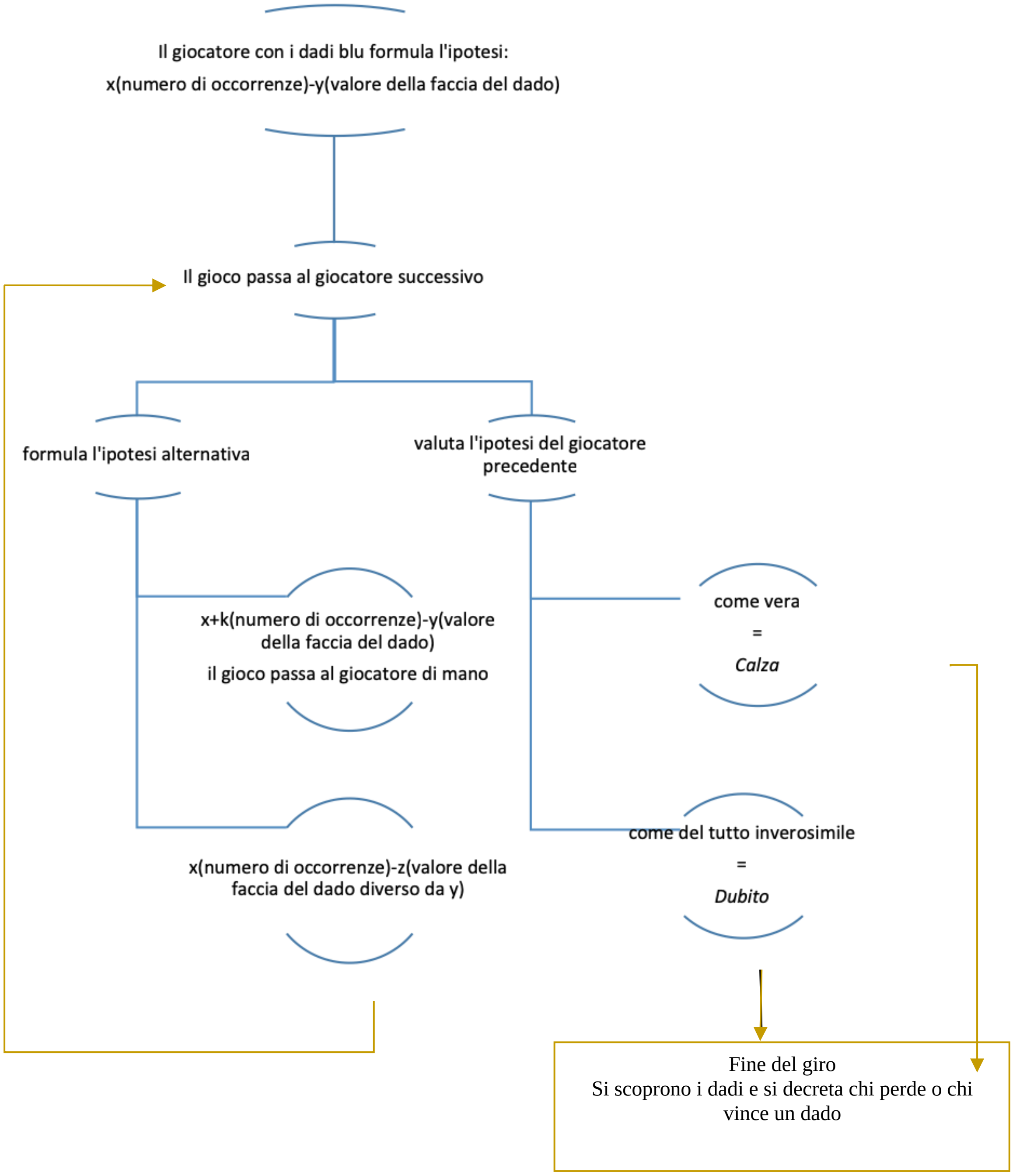
$$\mathrm{n} = \text{n° di dadi} = 30$$

$$\mathrm{F_i} \rightarrow \mathrm{i} = \mathrm{n},\ (\mathrm{n}-1), (\mathrm{n}-2), \dots,\ 1.$$

$$\mathrm{f}\begin{cases} \text{vince} \rightarrow \mathrm{d} < \mathrm{F_i} \\ \text{perde} \rightarrow \mathrm{d} \geq \mathrm{F_i} \end{cases}$$

$$\mathrm{v}\begin{cases} \text{vince} \rightarrow \mathrm{d} = \mathrm{F_i} \\ \text{perde} \rightarrow \mathrm{d} < \mathrm{F_i} \vee \mathrm{d} > \mathrm{F_i} \end{cases}$$

Schema della procedura del gioco e delle decisioni da prendere:




Si conta pertanto il numero di dadi su cui si è scommesso. Il giocatore che dichiara *Calza* vince se il numero scommesso come calzante è esattamente uguale a quello nel tavolo. In questo caso la vittoria consiste nel recupero di eventuali dadi precedentemente perduti. Se lo stesso giocatore, invece, dichiara *Dubito* vince se si scopre che il numero dubitato ricorre un numero di volte diverso di quanto scommesso dal giocatore precedente. In questo caso, vincerà la scommessa e sarà il giocatore precedente a perdere un dado.

Negli altri casi vince chi ha pronunciato la scommessa. Nel conteggio delle occorrenze delle facce, le teste di inca o di lama, che valgono da jolly, assumono il valore del dado di cui si sta contando l'occorrenza. Vince l'ultimo che rimane con almeno un dado.

Il Perudo è un gioco di dadi e pertanto sembra avere maggiori attinenze con la Probabilità invece che con la Statistica. Sebbene nei dadi un ruolo importante si deve attribuire alla fortuna, non si vince con la sola fortuna! È necessario stabilire una certa strategia per scegliere i passi da compiere. I giocatori di Perudo più esperti raramente dubitano sulle scommesse degli altri all'inizio del gioco, ma aspettano piuttosto che le scommesse siano così alte da rischiare di essere sfidati loro stessi da un altro giocatore. È opportuno scommettere sulle teste dell'Inca o di lama quando la scommessa non è abbastanza alta da richiedere il *Dubito*, ma è troppo alta perché la si possa aumentare con ragionevole sicurezza. L'arte per vincere in questo antico gioco peruviano sta nel sapere se e quando fare una scommessa personale o valutare quella del giocatore che lo ha preceduto.

Ed ecco che entra in ballo la Statistica. Traducendo in concetti di inferenza statistica il Perudo, possiamo identificare:

a) il valore del dado e le occorrenze corrette da trovare per vincere è lo stimatore;
b) il valore reale del dado con le occorrenze esatte è il parametro incognito;
c) la visualizzazione dei propri dadi e quindi del proprio numero di occorrenze e del valore del dado più frequente è la stima campionaria che dà origine ad una distribuzione campionaria;
d) la scommessa è l'ipotesi nulla che deve essere saggiata;
e) la scommessa del giocatore successivo è l'ipotesi alternativa;
f) il rischio di perdere dicendo "*Dubito*" è $\alpha$ l'errore di prima specie (rifiutare l'ipotesi nulla quando essa è vera);
g) il rischio di perdere dicendo "*Calza*" è $\beta$ l'errore di seconda specie (accettare l'ipotesi nulla quando essa è falsa);
h) la probabilità di vincere dicendo "*Dubito*" è $1-\alpha$ il livello di significatività dell'ipotesi;
i) la probabilità di vincere dicendo "Calza" è $1- \beta$ la potenza del test statistico;
j) la scommessa più verosimile è il valore atteso delle facce (ottenuto dalla somma, essendo eventi indipendenti, del valore atteso delle singole facce e il valore atteso delle facce di lame). E la scommessa/ipotesi è verosimile se è supportata dall'evidenza. Man mano che si perdono i dadi cambia il valore atteso perché cambia il numero delle occorrenze possibili e quelle probabili;
k) le ipotesi/scommesse degli altri possono dare delle forti indicazioni per dedurre l'ipotesi più verosimile. Il valore atteso è solo la sintesi delle distribuzioni di frequenza delle dichiarazioni di tutti che, se non bluffano, cercano di approssimare in prima battuta il valore modale delle occorrenze e poi quello atteso (incrementando il numero delle dichiarazioni il valore modale tende a quello atteso);
l) il numero di lama (Jolly) nel gioco potrebbe essere identificato come valore anomalo, da tenere in conto quando si formulano le ipotesi nulle o alternative.

La formulazione delle ipotesi a partire solo da informazioni parziali relative alla visione dei dadi in proprio possesso può dare lo spunto per introdurre in classe i concetti di informazione o rilevazione parziale e di informazione o rilevazione censuaria. Inoltre, le scommesse si possono via via perfezionare man mano che si ascoltano le dichiarazioni di ogni giocatore, rendendo ogni scommessa fortemente legata e condizionata alla scommessa precedente. Le probabilità condizionate o i teoremi sull'insiemistica possono tranquillamente prendere spunto dalle ultime considerazioni.

# COME AHMES, ASHA E MAYA DIVENNERO AMICI E IMPARARONO "CONTARE" L'UNO SULL'ALTRO.

*(di Antonietta Mira)*

3700 anni fa un ragazzo egiziano, Ahmes - che all'età di 40 anni divenne un famoso scriba e trascrisse il papiro Rhind (1650 a.C.) - e una giovane indiana, Asha, frequentavano la stessa scuola. Impossibile, direte voi. Questa è una favola dove tutto è possibile! Basta chiudere gli occhi e lasciar volare l'immaginazione.

Il primo giorno di scuola Asha arrivò in classe con una borsa piena di manghi.

"Se vogliamo diventare amici dobbiamo imparare a capirci" - disse Asha ad Ahmes – "cominciamo con un sistema comune di simboli per indicare i numeri, così ogni giorno ti porterò dei frutti e potremo contare quanti te ne ho regalati".

"Oggi mi hai regalato un mango" disse Ahmes ringraziando, e disegnò sulla sabbia una linea verticale

I

"Anche la scrittura brahmica dell'antica India nel III secolo a.C. usava il simbolo I per indicare il numero 1!" esclama Asha, orgogliosa dei suoi antenati.

"Quanti anni hai Ahmes?"
"Chiedilo al lettore!" rispose lui, strizzando l'occhio … al lettore naturalmente.

Il numero 1 è quindi scritto in modo simile sia da Ahmes che da Asha: un solido punto di partenza per la loro amicizia. Non è una sorpresa. Praticamente tutte le culture di oggi, ma anche del passato, usano un simbolo simile per rappresentare l'1 proprio come facciamo noi. La pratica ha decine di migliaia di anni e precede di gran lunga la scrittura, che ha solo cinquemila anni. Sembra che sia stata iniziata dai cacciatori-raccoglitori che, invece di scrivere sulla sabbia come aveva fatto Ahmes, usavano ossa o bastoni per registrare le quantità intagliando delle tacche in modo che rimanesse

traccia anche dopo una pioggia che avrebbe cancellato i segni disegnati sul terreno. Ossa e bastoni intagliati avevano anche il vantaggio di poter essere trasportati da un luogo all'altro e si sa, i cacciatori-raccoglitori erano nomadi: quando un terreno non era più fertile o gli animali diminuivano per via di migrazioni, anche loro si spostavano da un luogo all'altro in cerca di nuovo cibo.
"Passiamo ora al numero 2" continua Ahmes e traccia con il dito due righe sulla terra per indicare che, il secondo giorno di scuola, ha ricevuto in regalo da Asha 2 succosi manghi:

II

E il giorno dopo, per scrivere il numero 3 Ahmes usa, naturalmente, 3 righe:

III

A differenza dei loro contemporanei, come i mesopotamici, gli egiziani non raggruppavano le loro "I" in schemi specifici. Quindi per esempio le tre barrette di Ahmes si possono mettere sia in orizzontale sia in verticale.

Fin qui, tutto semplice. Ma pensate al numero 7: era facile confondersi quando lo si leggeva, specialmente da lontano:

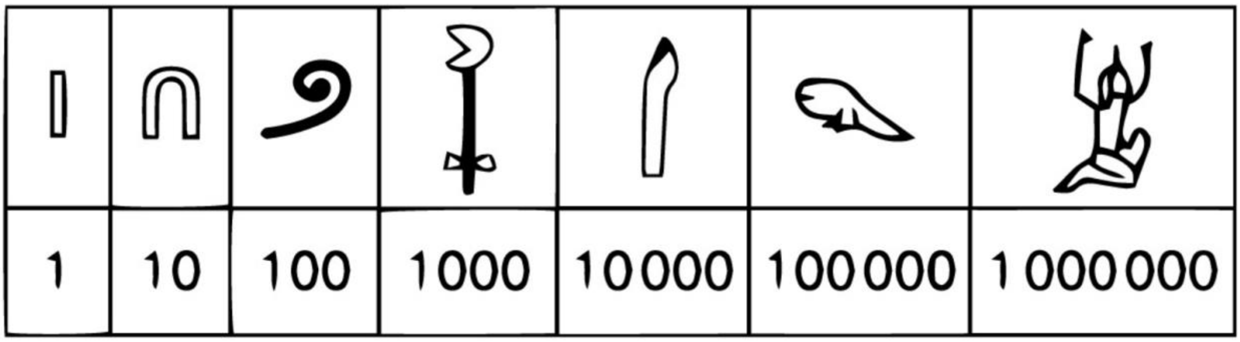
IIIIIII

Asha suggerisce allora alcune scorciatoie: "Se prendiamo le due barrette che rappresentano due manghi e le mettiamo in orizzontale, tanto per te non fa differenza, e mentre le tracciamo sulla sabbia, per essere più rapidi nella scrittura, alziamo appena il dito, ecco cosa succede"

Nasce così il simbolo che rappresenta il numero 2 come lo conosciamo noi oggi.

E in modo simile abbiamo per esempio il numero 3 e il 7 più o meno come lo scriveremmo oggi:

Mentre è facile intagliare una linea retta con un coltello su un pezzo di legno, intagliare una forma curva, come il nostro 2, sarebbe inutilmente difficile. Così Ahmes trovò l'idea di Asha interessante, ma rimase fedele ai suoi simboli.
Ahmes convenne però che per il numero 10 serviva un nuovo simbolo per non confondersi a contare tutti quei bastoncini uno in fila all'altro. Così pure per il numero 100, 1.000, 10.000 e 100.000. Serviva poi un simbolo speciale per indicare numeri molto grandi … e su questo torneremo.




Simboli usati da Ahmes.

Ahmes aveva un modo interessante di indicare le operazioni di addizione e sottrazione grazie ad un simbolo nella scrittura geroglifica. Rappresentava un uomo che correva: verso le quantità se dovevano essere aggiunte, nella direzione opposta se dovevano essere sottratte.

Ahmes aveva anche un simbolo speciale, che oggi chiameremmo "zero". Ma lo zero era usato da Ahmes solo in architettura per indicare il piano terra di una costruzione come una piramide. Per contare i piani sottoterra Ahmes usava quelli che noi oggi chiamiamo i "numeri negativi". Ora come allora bastava mettere un segno particolare davanti al numero per indicare che quel piano era sottoterra. Primo piano sotto la terra: -1 scriveremmo noi.

Asha trovò l'idea del simbolo "zero" molto interessante e decise di farne un uso ancora più ampio, non solo in architettura ma in generale per rappresentare i numeri in un modo totalmente diverso, il sistema numerico posizionale.

Questa idea fu trasmessa segretamente da Asha a Brahmagupta un matematico e astronomo che nel VI secolo usò un piccolo punto nero per indicare questo nuovo simbolo. Nasce così quello che oggi chiamiamo zero.

Per indicare il numero un milione Ahmes raffigurò un uomo con le braccia alzate verso il cielo. In generale questo simbolo era usato per rappresentare numeri estremamente grandi come faremmo oggi se volessimo indicare con le braccia che amiamo molto qualcuno: le allargheremmo per contenere simbolicamente tutto il nostro amore!

Maya, che frequenta la stessa scuola e viene dal Guatemala - in America Centrale, culla della civiltà Maya già a partire dal 750 a.c. - vuole dire la sua sui sistemi per rappresentare i numeri, forte del fatto che i Maya avevano elaborato un sofisticato sistema di conteggio per tenere conto per esempio del tempo che intercorreva fra due rituali religiosi, fra eventi astronomici particolari come eclissi, fra periodi di maggiore o minore fertilità della terra, o ancora, per evitare di intraprendere viaggi in giorni sfortunati e arrivare invece a destinazione in giorni propizi.

“Abbiamo 10 dita delle mani e 10 dita dei piedi e allora perché non contare in base 20?” chiese Maya. Sembra effettivamente molto naturale, considerando anche che in quelle civiltà antiche si camminava per lo più a piedi nudi e quindi le dita dei piedi … erano a portata di mano! “Spiegaci meglio la tua idea” chiesero Ahmes e Asha.

“Immaginiamo di avere solo tre simboli” continuò Maya:
. punti, FRIJOL (fagiolo), per l’unità
_ linee, PALITO (legnetto o stecchino) per il numero 5
O e una conchiglia, il simbolo per lo zero


“Secondo me sono pochi tre soli simboli per scrivere tutti i numeri!” sostiene Ahmes che era abituato a usarne molti di più.

Ma ecco l’idea geniale di Maya.
Il simbolo cambia valore a seconda della sua posizione. Un’idea a cui gli egizi non avevano pensato e, infatti, per Ahmes l’ordine in cui i simboli venivano scritti era irrilevante.

Immaginate, disse Maya, di costruire un tempio di numeri – e si sa, i Maya erano maestri nella costruzione di magnifici templi.

Man mano si sale ai piani alti in un tempio si acquista valore e, in effetti, in cima ai templi di solito troviamo preziosi altari per sacrifici alle divinità.
Ora pensiamo che i simboli ai piani alti - scritti sopra - valgano più di quelli ai piani bassi. Ogni volta che si sale un piano i simboli valgono 20 (come le dita delle mani e dei piedi messe insieme) volte di più.

Per esempio, un fagiolo al piano terra vale 1:
. uno

Un fagiolo al primo piano vale venti volte di più, quindi vale 20.
Ecco allora il numero 21:
. venti
. uno

E il numero 22
. venti
.. due

E ancora il numero 41:
.. venti x 2 = quaranta
. uno

E, se saliamo un altro piano ecco il numero 421

. 1 x 20 x 20 = 400 = quattrocento
. venti
. uno

Lo stesso discorso vale per il simbolo “legnetto”: se è posto al piano terra abbiamo il numero 5:

_ cinque

Ma se il legnetto sale di un piano ecco che il suo valore passa da 5 a 5x20 ovvero 100. E quindi così Maya scrive il numero 105:
_ 5 x 20 = 100
_ 5

E il numero 101 diventa:
_ cento
. uno

Ed ecco la sorprendente e magica utilità dello zero: per scrivere il numero 20 serve un simbolo speciale, lo zero appunto!

Il numero 20 viene quindi scritto da Maya così:
. venti
0

Il numero 400:
.  quattrocento
0
0

E se aggiungiamo un fagiolo al piano terra arriviamo a 401:
.  quattrocento
0
. uno

Se invece al piano terra mettiamo un bastoncino abbiamo il numero 405:
.  quattrocento
0
_ cinque

Facile esclamò Asha! Che decise di tenera l’idea “posizionale” di Maya (i simboli hanno un valore diverso a seconda della posizione), ma volle cambiare la base da 20 a 10 (usando quindi come riferimento le solo dita delle mani) e invece di 3 soli simboli decise di lavorare con 10 simboli.

Invece di salire ai piani più alti i simboli di Asha cambiano valore spostandosi a sinistra e ogni volta che un simbolo si sposta a sinistra di una posizione il suo valore viene moltiplicato per 10

1
10
100

E lo stesso per il simbolo 5:

5
50
500

“Facile vero?” gridò Asha felice del suo nuovo ed elegante modo di rappresentare i numeri.
E fu così che Ahmes, Asha e Maya diventarono amici per la pelle, vissero felici e contenti potendo contare gli uni sugli altri… per l’eternità, ovvero per un tempo infinito.
E dell’infinito parleremo in un’altra storia!