DIAMO I NUMERI!

DOSSIER pädagogisches

EINFÜHRUNG

Der Mathematiker ist ein fantasievoller Mensch. Wie der Dichter oder der Maler. Ich erzähle den Kindern immer die Geschichte von Gauß, der in Deutschland zwischen dem 18. und 19. Eines Tages in der Schule gibt der Lehrer ihnen zur Strafe die Aufgabe, alle Zahlen von eins bis 100 zu addieren. Verrücktes Zeug! Aber Gauß kam auf einen Trick: Er addierte 1+100, also die erste und die letzte Zahl in der Liste; dann 2+99, 3+98... Und er entdeckte, dass die Summe immer 101 ergibt. Da es 100 Zahlen gibt, muss er 50 Paare addieren, die zusammen 101 ergeben. Gauß multipliziert 101×50 und löst die Aufgabe als Erster. Er war 8 Jahre alt und ein sehr phantasievolles Kind: Er wurde zu einem der bedeutendsten Mathematiker der Geschichte."

Bruno D'Amore, Mathematiker und Pädagoge
Universität von Bologna

Nmb3d by numb3rs! (DIN) ist ein Projekt, das darauf abzielt, jungen Menschen und der erwachsenen Öffentlichkeit die Mathematik näher zu bringen, ohne die Schule zu ersetzen, sondern eine nicht-formale Art der Begegnung mit dem Wissen zu schaffen, bei der die Erfahrung, die Freude und die Emotionen des Einzelnen ins Spiel kommen können. Die Mathematik, die früher eine hervorragende Wissenschaft, ein Synonym für Weisheit und eine Brücke zwischen den Kulturen war, ist allzu oft zu einer verhassten oder ungeliebten Disziplin geworden. Paradoxerweise geschieht dies in einer Zeit, in der in jedem Augenblick Datenströme, Zahlen, die immer schwieriger zu handhaben und zu interpretieren sind, erzeugt werden. Von klein auf müssen wir uns nach und nach mit all dem vertraut machen, um bewusste Bürger einer Welt zu werden, in der zu wissen, wie man zählt, uns auch hilft, besser zu leben.

Über uns

Das Projekt **Nmb3d by numb3rs!** (DIN) - das vom Schweizerischen Nationalfonds (SNF Agora) finanziert wurde, ist das Ergebnis einer engen Zusammenarbeit zwischen Prof. Antonietta Mira, der wissenschaftlichen Leiterin des Projekts (Professorin für Statistik an der Universität Lugano und der Universität von Insubrien), und L'ideatorio, das sich mit der Beratung der Società Matematica della Svizzera italiana (SMASI) und der Unterstützung zahlreicher anderer lokaler Organisationen um den Aufbau und die Organisation kümmerte. Diese Dokumentation wurde von mehreren Händen und in mehreren Etappen geschrieben. Der erste Entwurf wurde von den Mitarbeitern von L'ideatorio in Zusammenarbeit mit Prof. Antonietta Mira und Federica Bianchi von der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der USI verfasst. Das Dossier wurde dann dank der Mitarbeit von Prof. Paola Mira (Mathematik- und Naturwissenschaftslehrerin an der Mittelschule in Casorate Primo, Italien), Prof. Silvia Sbaragli (SUPSI) und Luca Crivelli (SUPSI) für die didaktischen Erkenntnisse und Fabio Meliciani bereichert.

Es ist nicht als wissenschaftliches Handbuch gedacht, sondern als Ausgangspunkt für Lehrer, die die Ausstellung besuchen, und entspricht den Informationen in der Broschüre Numb3d by numb3rs! (Diamo i numeri!)

Organisation des Dossiers

Das Dossier besteht aus drei Teilen, die der Organisation der DIN-Ausstellung entsprechen: Fingers (Mathematik), Data, (Wahrscheinlichkeit) und (Statistik, Big Data, Data Science).

Haftungsausschluss

Dieses Dokument wurde nur an die Animatoren der Ausstellung Diamo i numeri! und an die Lehrer verteilt, die die Ausstellung besucht oder animiert haben, mit der Bitte, es nicht an andere weiterzugeben. Alle Bilder stehen unter einer Creative Common License.

Video

In diesen 3 Videos sehen Sie die Standorte der 3 Bereiche der Ausstellung in Pavia.
Es kann sein, dass die Version der Ausstellung, die Sie besuchen, nicht alle Stationen enthält.
Eine ausführliche Anleitung zum Bau der einzelnen Stationen finden Sie unter diesem Link:

https://fabiomelicianiscience.com/

FINGERS (Mathematik)
https://www.youtube.com/watch?v=mGw8cU7xoeA&t=4s

DICE (Wahrscheinlichkeit)
https://www.youtube.com/watch?v=7xIifSagg_E

DATA (Statistik, Datenwissenschaft)
https://youtu.be/HFgvPfdKOaU

Unter diesen Links können Sie zwei Organisatoren der Ausstellung in Pavia zuhören, die einige der Stationen erklären:

Ilaria Lago erklärt das Pferderennen
https://youtu.be/zMVAjcsOFJU

Samuel erklärt das farbige SUDOKU
https://youtu.be/FZWAXNJZJaI

NUMB3D
BY NUMB3RS!
DIGITS

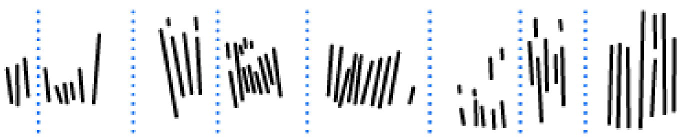
ZUM ZÄHLEN GEMACHT

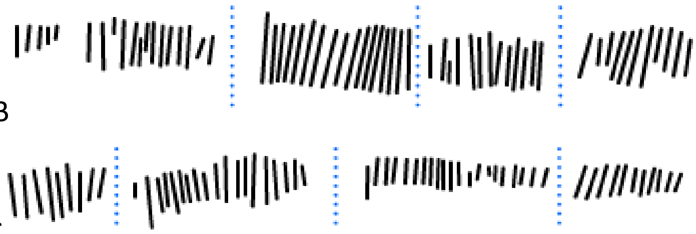
DER ISHANGO-KNOCHEN

Was ist das? Die frühesten Belege für die Verwendung von Zahlen durch den Menschen reichen mehr als 35.000 Jahre zurück und bestehen aus Knochen, die mit Kerben versehen sind, von denen man annimmt, dass sie irgendeine Art von Zählung anzeigen - Tage, Tiere? Der berühmteste antike Fund ist der Knochen aus Ishango, einem Dorf in der Demokratischen Republik der Kongo, die zwischen 20.000 v. Chr. und 18.000 v. Chr. datiert werden und aus dem oberen Paläolithikum stammen.

Und warum? Die Anordnung der Kerben in drei asymmetrischen Paaren deutet darauf hin, dass diese Anordnung beabsichtigt war. Daraus lässt sich ein erster Schritt zum Aufbau eines realen Zahlensystems ableiten. Zeile A - von links nach rechts gelesen - beginnt mit 3 Kerben und wird von 6 Kerben gefolgt, also doppelt so vielen. Das Gleiche gilt für die folgenden Zeilen: 4 Kerben, dann 8, um dann das System umzukehren, wobei auf 10 eine 5 folgt. Diese Zahlen lassen also auf ein Verständnis der Multiplikation und Division durch 2 schließen. Darüber hinaus scheinen die Anzahl der Kerben auf beiden Seiten der Reihen B und C auf eine wichtigere Rechenfähigkeit hinzuweisen. Die Zahlen sind alle ungerade: 9, 11, 13, 17, 19 und 21. Die in Reihe B eingekerbten Zahlen sind allesamt Primzahlen zwischen 10 und 20, während die in Reihe C nach der Regel 10 + 1, 10 - 1, 20 + 1 und 20 - 1 gebildet werden.

Reihe A





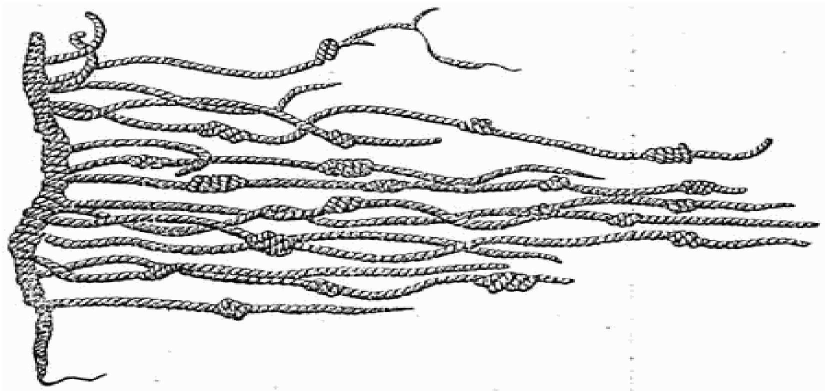
Reihe B

Reihe C

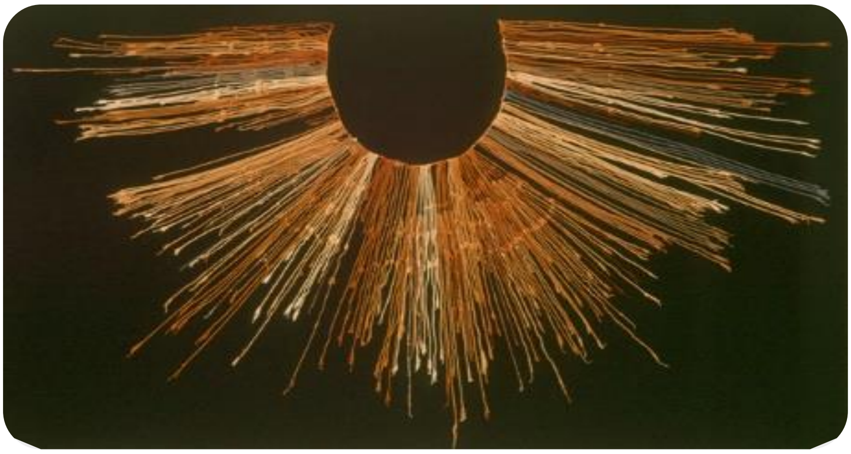
Tatsache: Der Ishango-Knochen ist das Wadenbein eines Pavians mit einer scharfen Quarzsplitterung an einem Ende, die wahrscheinlich zum Schnitzen verwendet wurde. Unter den Hypothesen, die die Anordnung dieser Einkerbungen am besten erklären, halten Wissenschaftler sie für die Zählung einer Abfolge von Tagen und insbesondere eines Mondmonats. Der Knochen wurde 1960 von Jean de Heinzelin de Braucourt (Belgien) bei einer Erkundung des ehemaligen belgischen Kongo entdeckt. Er wurde in der Nähe von Ishango, an der Grenze zwischen Uganda und Kongo, gefunden. Die Menschen, die dort 20.000 v. Chr. lebten, gehörten möglicherweise zu den ersten, die ein numerisches System verwendeten. Der Fund ist im Königlichen Museum für Naturwissenschaften in Brüssel ausgestellt.

DER QUIPU

Was ist das? In der Quechua-Sprache (einer indigenen Sprache Südamerikas) ist das Quipu oder Quipu eine Reihe von Seilen, die in regelmäßigen Abständen verknotet und an ein dickeres, kürzeres Seil gebunden sind, das sie trägt.



Und warum? Einige Zivilisationen, die sich in Lateinamerika entwickelten und die Zahlen noch nicht erfunden hatten, mussten sich einfallen lassen, um mathematische Probleme in Bezug auf Volkszählungen, Steuern, das Zählen gekaufter oder verkaufter Gegenstände, astronomische Berechnungen, die Beschreibung historischer und wirtschaftlicher Ereignisse und natürlich arithmetische Operationen zu lösen. Es ist möglich, dass das quipu von den Verwaltern der Inka benutzt wurde, um Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division für die Einwohner durchzuführen. Einige der auf dem quipu aufgezeichneten Knotenpunkte waren keine Zahlen, sondern 'Etiketten' von Zahlen, die als Code verwendet wurden, so wie wir Zahlen verwenden, um Objekte, Orte, Personen usw. zu bezeichnen. Andere Elemente des Quipu, wie die Position und der Abstand zwischen den Zeichenfolgen und die verwendeten Farben, stellten ebenfalls Informationen dar.



Kuriosität: Auch heute noch ist der Quipu ein Gegenstand, dessen Verwendung nicht vollständig geklärt ist. Quipu wurden hergestellt, um unverändert zu bleiben: Nachdem man sie nass gemacht und trocknen lassen hatte, wurden sie mit speziellen Harzen zusammengeklebt. Noch heute wird eine einfachere Version des Quipu von peruanischen und bolivianischen Hirten verwendet. Quipus können aus nur ein paar Saiten bestehen, aber manche haben bis zu 2000.

DIE KEGEL DES KONTOS

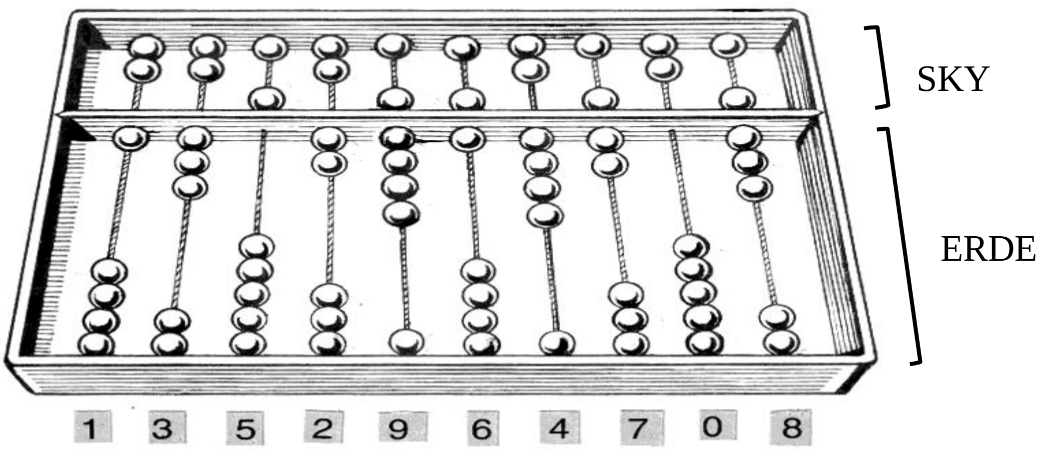
In der Vitrine in der Ausstellung sind neben dem Ishango-Knochen und dem Quipu auch die Kegel zu sehen, die die Sumerer zum Zählen verwendeten. Wir haben die Diskussion über die Zählkegel auf das nächste Kapitel (Von wem?) verschoben, unter der Überschrift 'Das sumerische Zählsystem'.

ABAKUS

Was ist das? Das Wort Abakus stammt von dem griechischen Wort *abaks* für Tisch, das wiederum von dem semitischen Wort *abaq* für Sand abstammt. Der älteste Abakus, der bereits in griechischer und römischer Zeit verwendet wurde, bestand aus einem Tisch, der mit einer dünnen Sandschicht bedeckt war und auf dem mit einem Stift Berechnungen durchgeführt wurden.

Der chinesische Abakus besteht aus einer Reihe von Stäben, die von rechts nach links die verschiedenen Wertordnungen anzeigen: auf dem ersten Stab die Einheiten, auf dem zweiten die Zehner, auf dem dritten die Hunderter, auf dem vierten die Tausender usw. Jeder Stab enthält sieben Kugeln und einen Balken, der fünf davon - im Teil namens Erde - von zwei anderen - im Teil namens Himmel - trennt. Jeder Stab enthält sieben Kugeln und einen Balken, der fünf von ihnen - in dem Teil, der Erde genannt wird - von zwei anderen - in dem Teil, der Himmel genannt wird - trennt. Der Wert jeder Kugel im 'Himmel' entspricht dem Fünffachen derjenigen im 'Erde'.

Es gibt auch das Modell mit sechs Kugeln (japanischer Abakus), das komplizierter zu benutzen ist, mit 5 Kugeln für 'Erde' und 1 für 'Himmel'.



Und warum? Der Abakus ist ein uraltes Werkzeug, das von den Menschen zum Lösen von Berechnungen erfunden wurde und in chinesischen Schulen immer noch zu Lehrzwecken verwendet wird. Um eine Zahl darzustellen, bewegen Sie die Kugeln in Richtung der horizontalen Stange und denken Sie daran, dass die Kugeln oben fünfmal so viel wert sind wie die Kugeln unten an derselben Stange. In der obigen Abbildung ist die Zahl 1'352'964'708.

Neugierde: Im alten China wurden Abakusse mit Bambusstäben verwendet, später setzten sich Tabellen durch, auf denen Teilungslinien und Spalten markiert waren, die die verschiedenen Einheitenordnungen des verwendeten Zahlensystems anzeigten. Auf diesen Linien wurden dann Zahlensteine platziert, so dass jede Art von Berechnung durchgeführt werden konnte.
Ein wichtiger Fehler des Abakus besteht darin, dass er es nicht erlaubt, vergangene Operationen zu korrigieren. Wenn also ein Fehler gemacht wird, muss alles von Anfang an wiederholt werden. Japanische Unternehmen umgingen dieses Problem, indem sie drei Abakus gleichzeitig dieselbe Berechnung durchführen ließen: Wenn die drei Lösungen identisch waren, dann war die Lösung richtig.

Um zu lernen, wie man Zahlen darstellt und Operationen mit dem Abakus durchführt, empfehlen wir diese Videos

https://www.youtube.com/watch?v=FTVXUG_PngE
https://www.youtube.com/watch?v=I8EZvig5fOU
https://www.youtube.com/watch?v=YQLjDD9SzGA ERGÄNZENDE METHODE

https://www.youtube.com/watch?v=22NdwzuEZi4 AUSTAUSCHMETHODE
https://www.youtube.com/watch?v=r0aKV3HqDzA ERGÄNZENDE METHODE

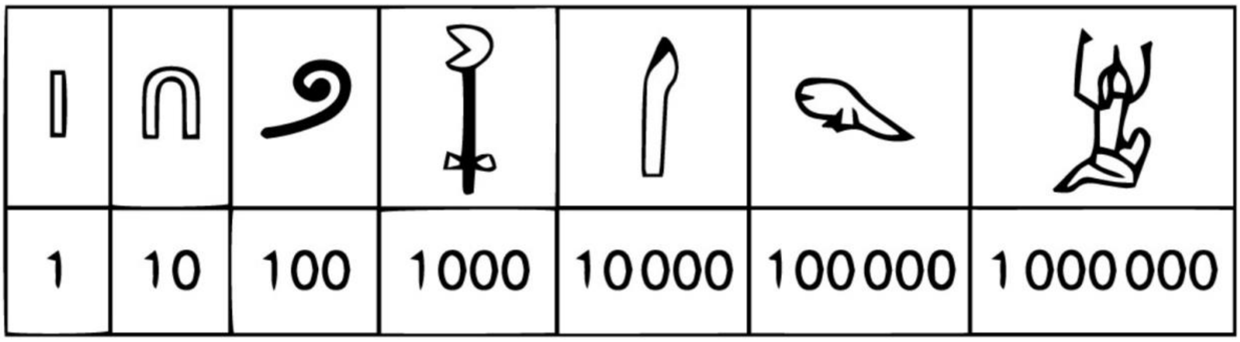
AUF DER GRUNDLAGE VON WEM?

ZÄHLSYSTEME

Ägyptische Zahlen

Zeit der Einführung: um 3000 v. Chr.

Das ägyptische Zahlensystem war zu der Zeit, als es erfunden wurde, recht fortschrittlich. Die Zahlen wurden mit den in der Abbildung gezeigten Symbolen dargestellt. Die Position der Symbole hatte keinen bestimmten Wert wie in unserem System, das als positional bezeichnet wird. Im Gegenteil, es war ein additives System, d.h. die Werte der Symbole wurden addiert.



Unsere Zahl 1 war für die Ägypter leicht zu schreiben, da sie ein spezielles Symbol hatten: einen geraden vertikalen Balken '**I**'.

Auch die Zahl war auch einfach: ein umgekehrtes U'. ".

Aber jetzt stellen Sie sich vor, Sie schreiben: 'Ich habe Ziegen'. Dazu mussten sie das Symbol für die 1 achtmal wiederholen und erhielten so "**IIIIII**".

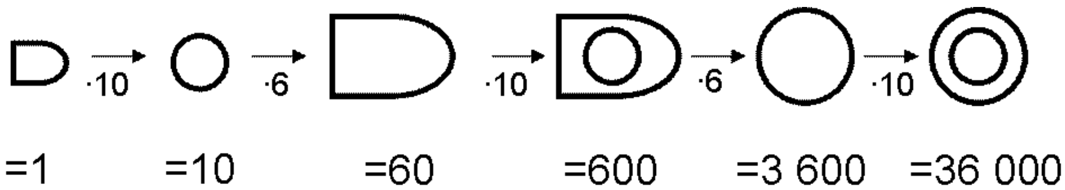
Hätten sie Ziegen gehabt hätten, hätten sie schreiben müssen: ' **IIIIII**' oder sie hätten auch '**IIIIII**'. was ebenfalls 16 bedeutete, denn, wie bereits erwähnt, spielte die Position der Symbole keine Rolle.

Es lohnt sich auch, daran zu denken, dass die Ägypter die Geometrie erfunden haben - das Studium von Punkten, Linien, Winkeln, Flächen und Körpern. Sie wussten, wie man das Volumen von Zylindern und Pyramiden und die Flächen verschiedener geometrischer Formen berechnet. Die geometrischen Konzepte, die sie entwickelten, waren nützlich, um nach Überschwemmungen die Grenzen des Ackerlandes entlang des Nils zu rekonstruieren. Und natürlich sind die erstaunlichen Pyramiden von Gizeh der Beweis dafür, dass die Ägypter die Geometrie nicht nur erfunden haben, sondern auch Meister in ihrer Anwendung wurden.

Das sumerische Zählsystem

Was sind sie? Zählkegel sind ein uraltes Zählsystem, das bereits vor der Erfindung der Zahlen verwendet wurde. Sie wurden in den Gebieten des heutigen Iran und Irak von den Sumerern und Elamiten um 3000 v. Chr. verwendet und bestanden aus getrocknetem Ton.

Und warum? Das Fehlen von Zahlen stellte die Sumerer vor folgendes Problem: Wie konnte man Mengen darstellen und komplexe Berechnungen anstellen, die nicht nur mit dem Verstand und den Händen gelöst werden konnten? Die Sumerer stellten Kegel, Spielsteine, Murmeln und Kugeln her, um verschiedene Werte darzustellen:



Kleiner Kegel / Kugel / Großer Kegel / Großer Kegel durchbohrt / Große Kugel / Große Kugel durchbohrt

Die von den Sumerern für die Token gewählten Werte verdeutlichen die Verwendung der Basis 60 mit der Hilfsbasis 10 für ihr numerisches System. Arithmetische Operationen wurden manuell durchgeführt, d.h. durch Addition oder Subtraktion von Spielsteinen: Für Subtraktionen war es oft notwendig, einen Spielstein mit einem bestimmten Wert in Spielsteine mit einem niedrigeren Wert zu 'zerlegen'. Um die Subtraktion 30 - 7 zu lösen, musste man eine der großen 'Zehner'-Murmeln in zehn Einheiten, bestehend aus kleinen Kegeln, zerlegen und dann 7 kleine Kegel entfernen, wie es die Subtraktion vorgibt. Damit bleiben 2 große Murmeln (Zehner) und 3 kleine Einser (Einer) übrig, also 23.

Kurios: Kegel waren nicht nur ein Recheninstrument: Man konnte auch einen Darlehensvertrag abschließen, indem man eine tönerne Bulla benutzte, in die die Kegel, die den fraglichen Betrag darstellten, gelegt wurden. Sie wurde dann gebrannt oder getrocknet und von den Parteien unterzeichnet. Die Bulla wurde bei der Rückzahlung zerbrochen, um den Betrag zu überprüfen. Später wurden Tontafeln erfunden, auf die die Kegel - und die entsprechenden Darlehensbeträge - gezeichnet wurden, so dass numerische Symbole entstanden. Die Tafel unten zeigt, wie die Menge der verschiedenen Gegenstände in verschiedenen Kästchen markiert wurde (3. Jahrtausend v. Chr.).

Das babylonische Zählsystem

Zeit der Einführung: 1900 v. Chr. bis 1800 v. Chr.

Das babylonische Zählsystem verwendet die Basis statt der Basis die wir heute in der westlichen Welt zum Zählen verwenden. Allerdings zählen wir auch heute noch einige Dinge in der Basis zum Beispiel hat eine Stunde Minuten und eine Minute hat Sekunden. In einem Kreis gibt es außerdem Grad (Ihr System ist nicht schwer zu verstehen, nicht zuletzt weil im babylonischen System die Position der Zahlen wichtig war, d.h. es war ein Positionssystem.

Die Babylonier hatten nur zwei Symbole:

 vertreten.

 vertreten.

Mit diesen beiden Symbolen wurden die Zahlen bis 59 dargestellt. Hier sind einige Beispiele:

Selbst die Babylonier hatten kein Symbol für die Null. Später 'erfanden' sie jedoch ein Zeichen für die Null und verwendeten es nur in der Mitte der Zahl, nie an einem der Enden.

Die Babylonier benutzten wie wir auch ihre Hände zum Zählen. Aber wir haben nur Finger. Wie haben sie also die größeren Zahlen gezählt?
Sie haben ein neues System erfunden.

Mit dem Daumen zählten sie die drei Segmente - Phalangen - der anderen vier Finger und kamen so auf .

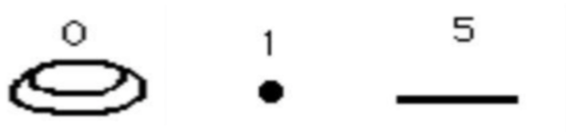
Sie markierten dann die Tatsache, dass sie bei einen Finger auf der anderen Hand zu erheben.
Und auf ähnliche Weise markierten sie die Tatsache, dass sie angekommen waren indem sie zwei Finger an einer Hand erhoben und auf den auf der anderen. Dann

Die Zahlen der Maya

Zeit der Einführung: um 500 v. Chr.

Die Maya-Mathematik ist das ausgefeilteste Zählsystem, das je in der Antike entwickelt wurde. Sie verwendet ein System, das auf dem das wahrscheinlich mit den Fingern und Zehen entwickelt wurde, um zu zählen.

Das System hat nur drei Symbole: einen Punkt, der den Wert von , ein horizontaler Balken, der die und einen Kreis innerhalb eines weiteren Kreises, der die Null darstellt. Die Maya-Null wurde jedoch nur als Platzhalter und nicht für Berechnungen verwendet.



Diese Symbole, die in verschiedenen Kombinationen verwendet werden, wurden echten Alltagsgegenständen entnommen: die Null aus einer Muschel, der Punkt aus einer Bohnenstange und der Stab aus einem Holzstab.

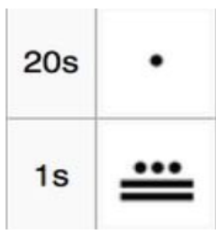
Addition und Subtraktion waren einfach und selbst ungebildete Menschen konnten die für Handel und Gewerbe erforderlichen Summen berechnen.

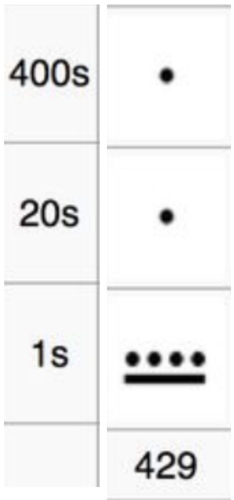
Um zum Beispiel zwei Zahlen zu addieren, wurden die Symbole jeder Zahl nebeneinander gelegt und dann zu einer neuen Zahl verbunden. So können zu zwei Balken und einem Punkt, die die Zahl ein Balken für fünf hinzugefügt werden, um drei Balken und einen Punkt zu erhalten, d.h. . Dies gilt, wenn man innerhalb von 20 bleibt, ansonsten muss der Positionswert berücksichtigt werden.

Die Position eines Symbols im Verhältnis zu einem anderen war für die Maya wichtig: Je höher ein Symbol platziert war, desto größer war sein Wert. Sein Wert stieg mit den Kräften der Winde.

Hier sind zwei Beispiele:

wird mit einem Punkt über dem Zeichen . Der Punkt oben steht für "ein Zwanziger" oder "", das zu 13 addiert wird.
Deshalb, .





Die Zahl wird in Maya-Symbolen wie in der Abbildung dargestellt: unten die Neun, darüber ein Punkt, der die und ein weiterer Punkt darüber steht für .

Römische Ziffern

Alter der Einführung: seit der Gründung des antiken Roms 753 v. Chr.

Das römische Zahlensystem wurde fast 1800 Jahre lang verwendet, bevor es durch das indo-arabische System ersetzt wurde, das wir heute verwenden. Das war im Jahr 1300, also vor nur 720 Jahren!

Wie die Ägypter und Babylonier hatten auch die Römer keine Null. Außerdem war das römische System additiv.

Römische Ziffern wurden durch 'Buchstaben' dargestellt:

I = 1	C = 100
V = 5	D = 500
X = 10	M = 1000
L = 50	

Diese 'Buchstaben' wurden aneinandergereiht, um Zahlen zu bilden. Auf römisch, wäre es **LXXII** oder: **L** = , **X** = , **I** = dann

Für längere Zahlen erfanden die Römer eine neue Regel. Es wurde eine subtraktive Schreibweise eingeführt, bei der z.B. **VIIII** durch **IX** ersetzt wurde (10-1=9). Dies vereinfachte die Schreibweise langer Zahlen etwas, machte aber die Berechnung noch schwieriger.

Nehmen wir die Zahl . Nach der ersten Regel oben würde sie geschrieben werden in 'Roman' als: **XVIIII** (), aber mit der neuen Regel wird sie zu XIX - d.h. gleich . Und die Zahl **- XIIII** - wird zu **XIV**.

Diese neue Regel gilt nur für Zahlen, die gleich oder kleiner als das Zehnfache des Wertes der vorherigen Zahl sind. Ein Beispiel: kann nicht als **MIM** geschrieben werden, denn **M** ist das Tausendfache von **I**. In diesem Fall muss es auf diese Weise geschehen:

auf Lateinisch ist **MCMXCIX**
Das heißt, **M** (1000) + **CM** (1000-100) + **XC** (100-10) + **IX** (10-1)

Die Zahlen der alten Indianer

Alter der Einführung: begann um 600 v. Chr.

Die älteste dokumentierte Null ist erstaunlich modern: Sie befindet sich im Chaturbhuj-Tempel in Gwalior, Madhya Pradesh in Zentralindien, und stammt aus der Zeit um 875 v. Chr. Der Tempel ist berühmt für das älteste Beispiel einer geschriebenen Null: Sie ist in die Tempelwand eingraviert, wobei ein Teil der Zahl '270' deutlich sichtbar ist.

Die Araber brachten das indo-arabische Zahlensystem nach Europa und heute wird es in der gesamten westlichen Welt verwendet.

Inder zählen wie Westler, zumindest bis 99999, und die Position der Zahlen ist wichtig. Ab 100000 sind die Namen der indischen Zahlen anders.
heißt im Westen hunderttausend und in Indien ein Lakh.
wird im Westen als eine Million und in Indien als zehn Lakh bezeichnet.
wird im Westen als 10 Millionen und in Indien als eine Crore bezeichnet.
Es gibt andere Namen für noch höhere Zahlen, aber wir werden hier aufhören.

Inder schreiben auch Zahlen anders als Westler. Die Position von Kommas und Punkten ist unterschiedlich:
100000 wird im Westen als 100.000 oder 100.000 (hunderttausend) und in Indien als 1.00.000 (ein Lakh) geschrieben;
30000000 wird im Westen mit 30.000.000 oder 30.000.000 (dreißig Millionen) und in Indien mit 3.00.00.000 (drei Krore) geschrieben.

Wie zählen Computer?

Einführungszeit:
Das Binärsystem wurde um 1700 erfunden, Computer um 1940.

Der Computer kennt nur zwei Zahlen: 0 und 1. Das ist alles!
0 steht für 'Aus' und 1 für 'Ein'. "Aus" und "Ein" beziehen sich auf den elektronischen Schalter, der ein- oder ausgeschaltet werden kann. Wenn Sie zum Beispiel den Schalter einschalten, geht das Licht an. In alten Computern gab es viele Schalter, die ein- und ausgeschaltet werden konnten, um verschiedene Zahlen darzustellen.

Dieses System aus 'Einsen' und 'Nullen' wird als Binärsystem bezeichnet.
Die 'Eins' und die 'Null' werden Bits genannt. Bit ist die abgekürzte Form von **BinarydigIT**.
In einem Computer sind die Bits in der Regel acht an der Zahl.

Acht Bits werden als Bytes bezeichnet. Zum Beispiel, ist ein Byte.

Jedes Lied, jeder Film, jedes Foto, jedes Buch, jedes Bild und so weiter kann in eine Folge von Einsen und Nullen übersetzt werden. Diese Sequenzen machen Videos und Fotos auf dem Computerbildschirm sichtbar. Unglaublich, nicht wahr?
Je mehr Bits/Bytes ein Computer hat, desto mehr Informationen (Fotos, Texte, Videos, Musik, ...) kann er speichern.

Das Binärsystem war bereits 1703 von dem deutschen Philosophen und Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz erfunden worden. Er schrieb eine vollständige Dokumentation des Binärsystems, die später von den Erfindern des Computers verwendet wurde. Diese frühen Maschinen sahen ganz anders aus als die heutigen Computer, aber sie arbeiteten alle auf dieser binären Basis.
Die heutigen *Smartphones* sind viel leistungsstärker als die ersten Computer!

Pädagogische Einblicke

Die Darstellung einiger historischer Aspekte der Mathematik, insbesondere der verschiedenen Zahlensysteme, die im Laufe der Zeit aufeinander folgten und von verschiedenen Kulturen geschaffen wurden, sowie der von ihnen verwendeten Zählwerkzeuge, dient mehreren Zwecken:
- erleben Sie das Zählen und die Zahlendarstellung auf eine andere Art und Weise, als wir es gewohnt sind, und öffnen so die Augen für die Vielfalt der Lösungen;
- unser numerisches System besser zu verstehen, denn durch den Vergleich mit anderen Systemen können wir besser verstehen, wie das System, das wir täglich benutzen, funktioniert;
- vergleichen Sie antike Instrumente mit denen, die wir heute verwenden;
- erkennen, dass jede Kultur unterschiedliche Entscheidungen getroffen hat, die alle auf das gleiche Ziel (den Wunsch zu zählen) abzielen, und dass jede Entscheidung als teilbar zu betrachten ist, wodurch das Bewusstsein für den Respekt vor dem anderen geschärft wird;
- verstehen, dass Mathematik keine statische Disziplin ist, sondern eine, die sich ständig weiterentwickelt;
- erkennen, dass die Mathematik von Menschen für Menschen gemacht wurde;
- Begeisterung für Mathematik.

Was die Grundschule betrifft, so werden die unterschiedlichen Zahlensysteme der verschiedenen Kulturen, die sich im Laufe der Zeit abgelöst haben, und die von ihnen verwendeten Zählwerkzeuge in den Materialien des Projekts 'MaMa-mathematics for primary schooling' betrachtet, das vom Ministerium für Bildung, Kultur und Sport beim Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik des Departements für Bildung und Lernen / Alta scuola pedagogica in

Locarno (Schweiz) in Auftrag gegeben wurde. Diese Materialien können unter diesem Link kostenlos heruntergeladen werden: https://mama.edu.ti.ch/.
Wir empfehlen Ihnen insbesondere, sich zu informieren:
- *Leitfaden* für mathematische, didaktische und historische Einblicke in die verschiedenen Zahlensysteme der Antike. In diesem Dokument werden auch einige historische Hilfsmittel vorgestellt, die von verschiedenen Kulturen verwendet wurden, darunter auch die hier vorgestellten. Dieses Dokument kann auch für spätere Schulstufen nützlich sein;
- der *Bedeutungskontext* 'Mathematik auf einer Reise durch Raum und Zeit', ein Dokument, in dem Ideen für die Gestaltung sinnvoller Lernsituationen im Zusammenhang mit der Mathematik verschiedener Kulturen, die in unterschiedlichen historischen Epochen verwendet wurde, gegeben werden;
- die *Didaktische Praxis* "Die Zahlensysteme der Alten", ein Dokument mit didaktischen Vorschlägen, die sich unter anderem auf die Zahlensysteme der Urmenschen, der Sumerer, der Inkas, der Ägypter, der Mayas, der Babylonier und der Römer beziehen die didaktische Übung "Verschiedene Berechnungsalgorithmen", in der verschiedene Algorithmen vorgeschlagen werden, von denen einige im Laufe der Geschichte aufeinander folgten und verschiedene Orte prägten; - die didaktische Übung "Zahlen und das Positionssystem", in der es viele Ideen im Zusammenhang mit dem indo-arabischen Zahlensystem gibt, darunter die Konstruktion eines kleinen Abakus.

- die *Didaktischen Blätter* für Schüler, die Sie finden, wenn Sie den Filter "Andere Zahlensysteme" in der Suchmaschine für Unterrichtsmaterialien einstellen. Wir heben insbesondere hervor: "Das Geschwindigkeitsrennen", "Zehn Kerben", "Sumerische Zahlen 1", "Sumerische Zahlen 2", "Sumerische Zahlen 3", "Sumerische Zahlen 4", "Inka-Zahlen 1", "Inka-Zahlen 2", "Römische Zahlen 1", "Römische Zahlen 2", "Römische Zahlen 3", "Römische Zahlen 4", "Maya-Zahlen 1", "Maya-Zahlen 2", "Die Maya Zahlen 3", "Die Maya Zahlen 4", "Die Ägyptischen Zahlen 1", "Die Ägyptischen Zahlen 2", "Die Ägyptischen Zahlen 3", "Die Ägyptischen Zahlen 4", "Wettlauf zwischen den Systemen", "Vergleich der Systeme", "Antike Berechnungen", "Die Verwendung des Abakus", "Lernen wir den Abakus kennen", "Dezimalzahlen, die begeistern", "Laura lässt sich nicht ablenken".

Außerdem finden Sie in der Sammlung "Mathematiker in Comics", die Sie kostenlos online herunterladen oder in gedruckter Form erwerben können und die vom Daedalus Verlag herausgegeben wird, 22 Comics zu wichtigen Mathematikern der Geschichte. Insbesondere der Comic des Mathematikers Al-Khwārizmī (9. Jh.) bietet einen detaillierten Einblick in die Geburt unseres Zahlensystems.

Für Lehrer, die in der Mittelstufe arbeiten, steht auch das Unterrichtsmaterial 'Mathematik in der Geschichte' zur Verfügung, das durch Arbeitsblätter für Schüler ergänzt wird, die vom ScuolaLab-

Portal heruntergeladen werden können (wo Sie sich registrieren müssen, um die Dokumente herunterladen zu können).

Die folgenden erzählenden Bücher, die bereits für die Grundschule geeignet sind, befassen sich mit dem Zählen und können mit der Verwendung des Abakus und anderer Zählwerkzeuge in Verbindung gebracht werden:
- Abedi, I. (2002). *Eins, zwei, drei... 99 Schafe!* La Margherita Editions.
- Bellei, M. (2020). *Städte der Zahlen*. Fatatrac.
- Cerasoli, A. (2012). *Die große Erfindung von Bubal*. Emme Editions.
- Cerasoli, A. (2019). *Die fünffingrigen Schwestern*. Wissenschaftlicher Leitartikel.
- Chermayeff, I. (2014). *Blinde Mäuse und andere Zahlen*. Corraini.
- D'Angelo, S. (2008). *Zählen Sie nie auf Mäuse*. Topipittori.
- Fromental, J. L., & Jolivet, J. (2010). *10 kleine Pinguine*. Der Biber.
- Giusti, A. (2011). *Awa lehrt das Zählen.* Der Garten des Archimedes
- Ohmura, T. (2011). *Alle in die Schlange!* Babalibri.
- Tolstoi, A. (1999). *Die Riesenrübe*. Fabbri.
- Urberuaga, E. (2015). *Eine schwarze Sache*. Lapis.

Unter diesem Gesichtspunkt ist die reichhaltige Sammlung von Rezensionen '100 illustrierte Bücher zwischen Italienisch und Mathematik: eine Bibliographie mit didaktischen Hinweisen' von Demartini und Sbaragli erwähnenswert.

Die folgenden erzählenden Bücher, die ab der Grundschule geeignet sind, befassen sich mit der Geschichte der Mathematik:
- Cerasoli, A. (2012). *Die große Erfindung von Bubal*. Emme Editions.
- Giusti, A. (2011). *Awa lehrt das Zählen.* Der Garten des Archimedes
- Petti, R. (2008). *Uri, der kleine Sumerer*. Der Garten des Archimedes.
- Petti, R. (2008). *Ahmose und der 999'999 Lapislazuli.* Der Garten des Archimedes.

Darüber hinaus empfehlen wir Ihnen die folgenden Quellen für ein vertieftes historisches und pädagogisches Studium für Erwachsene:
- Boyer, C.B. (1982). *Geschichte der Mathematik*. Mondadori.
- Bunt, L., Jones, P. S., & Bedient, J. D. (1987). *Die historischen Wurzeln der Elementarmathematik*. Zanichelli.
- Ifrah, G. (1989). *Universelle Geschichte der Zahlen*. Arnoldo Mondadori. (Orig. Aufl. auf Französisch: 1981).
- D'Ambrosio, U. (2002). *Ethnomathematik*. Pythagoras.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *Die Mathematik und ihre Geschichte. I. Von den Ursprüngen bis zum griechischen Wunder*. Daedalus Editions.
- D'Amore B., & Sbaragli S. (2018). Die *Mathematik und ihre Geschichte: vom griechischen Sonnenuntergang bis zum Mittelalter*. Daedalus Editions.
- Fontana Bollini, V., & Lepori, G. (2019). Eine Geschichte der Mathematik in der Mittelstufe: die Quadratur von ebenen Figuren. *Didactics Of Mathematics. From Research to Classroom Practices,* (6), 131-150.
- Nicosia, G. G. (2008). *Zahlen und Kulturen*. Erickson.

- Vecchi, N. (2010). *Wie die Zahlen entstanden sind. Eine Bildungsreise vom Urmenschen zum Abakus*. Rom: Carocci.

Im Folgenden finden Sie auch einige Artikel, in denen der Abakus als Werkzeug verwendet wird. In einigen wird er als Beispiel genannt, in anderen wird er mit anderen Artefakten wie der Pascaline verglichen.

- Bartolini-Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotische Vermittlung im Mathematikunterricht: Artefakte und Zeichen nach einer Vygotskianischen Perspektive. *Handbook of international research in mathematics education*, *746*.
- Bartolini-Bussi, M. G., & Boni, M. (2003). Instrumente zur semiotischen Vermittlung im Grundschulunterricht. *Für das Lernen von Mathematik*, *23*(2), 15-22.
- Maschietto, M. (2013). Instrumentensysteme für den Stellenwert und arithmetische Operationen: Eine explorative Studie mit der Pascaline. *Bildung*, *3*, 221-230.

DIE BEMERKENSWERTEN ZAHLEN

NEPER NUMBER 'e'

Die Nepero-Zahl, die oft mit dem Buchstaben 'e' bezeichnet wird, ist eine der wichtigsten mathematischen Konstanten und wird in verschiedenen Bereichen der Mathematik, Wissenschaft und Technik verwendet. Ihr ungefährer Wert beträgt etwa 2,71828. Die Neperosche Zahl ist eine irrationale und transzendente Konstante, was bedeutet, dass sie nicht als Division ganzer Zahlen dargestellt werden kann und keine Lösung für eine algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Dies macht sie zu einer ganz besonderen Zahl in der Zahlentheorie.

Die Neperosche Zahl wird durch die unendliche Reihe definiert:

$$e = 1 + 1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \ldots$$

Dabei steht "!" (factorial) für das Produkt aller positiven ganzen Zahlen bis zur angegebenen Zahl. Zum Beispiel, (5 faktoriell) ist gleich 5x4x3x2x1

Die Nepero-Zahl taucht natürlich in verschiedenen mathematischen Zusammenhängen auf, z.B. in der Differential- und Integralrechnung, der komplexen Analyse, den Differentialgleichungen, der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Exponentialrechnung. Sie wird häufig bei Berechnungen des exponentiellen Wachstums und Zerfalls sowie bei der Bewertung von kontinuierlichen Zinsen in der Finanzmathematik verwendet.

Der Name 'Nepero's Zahl' leitet sich vom Nachnamen des Schweizer Mathematikers Leonhard Euler ab, der häufig den Spitznamen 'Nepero' verwendete. Die Verwendung des Namens 'e' für diese Konstante wurde jedoch von dem englischen Mathematiker Charles Maclaurin im Jahr 1718 eingeführt.

PI GRECO "π "

Die Zahl π (Pi) ist eine grundlegende mathematische Konstante, die das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser darstellt. Sie ist eine irrationale Konstante, was bedeutet, dass ihr Dezimalwert nicht genau als Bruch ausgedrückt werden kann und sie eine unendliche, nicht-periodische Darstellung hat. Das Symbol 'π' leitet sich von dem griechischen Buchstaben

'pi' (π) ab, der der erste Buchstabe des griechischen Wortes 'perimetros' ist, was 'Umfang' bedeutet.
Der ungefähre Wert von π ist 3,14159265358979323846... und so weiter, aber es gibt keine genaue Darstellung in Bruchform. Der Bruch wird oft als Näherungswert für π verwendet, aber er ist nur eine Näherung und nicht exakt.
Die Zahl π wird in vielen Bereichen der Mathematik und Wissenschaft verwendet, darunter Geometrie, Trigonometrie, Kalkül und Physik. Sie ist eine der wichtigsten mathematischen Konstanten und kommt in vielen grundlegenden Formeln und Beziehungen vor. Zum Beispiel ist der Flächeninhalt eines Kreises A gegeben durch , wobei der Radius des Kreises ist.
Es gibt Gedächtniswettbewerbe für die Berechnung der Nachkommastellen von π, bei denen die Teilnehmer versuchen, sich so viele Nachkommastellen wie möglich zu merken und aufzusagen. Der Weltrekord für das Auswendiglernen der Nachkommastellen von Pi liegt bei 70.000!
Mit dem Aufkommen von Computern war es möglich, Milliarden von Dezimalstellen von π zu berechnen, und diese Tätigkeit wurde von vielen Enthusiasten und Forschern durchgeführt. Für die meisten praktischen Anwendungen sind jedoch einige wenige Dezimalstellen von π ausreichend.

Pi-Tag: Der **14**. März (3/14 im Monat/Tag-Format in den USA) wird oft als 'Pi-Tag' gefeiert, weil das Datum den ersten drei Ziffern von π (3,14) entspricht. Aufgrund der ähnlichen Aussprache der Wörter 'pi' und 'pie' (was im Englischen 'Kuchen' bedeutet), sieht man am Pi-Tag häufig Bilder von Festtagskuchen.

Verschlüsselungsverhältnis: Die Zahl π wird in der Kryptographie und Computersicherheit häufig verwendet, um Zufallsfolgen zu erzeugen und Verschlüsselungsalgorithmen zu erstellen.

NULL

Die 'Nullnummer' ist eine ganze Zahl, die das Fehlen eines Wertes oder die Nullmenge darstellt. Sie ist ein grundlegendes Konzept in der Mathematik. Die Zahl Null ist die einzige Zahl, die weder positiv noch negativ ist und spielt eine entscheidende Rolle im Zahlensystem und bei mathematischen Berechnungen.
Das Konzept der Null hat eine Geschichte, die auf viele alte Kulturen zurückgeht, darunter die Babylonier und Ägypter, die Symbole hatten, um die Leere oder Abwesenheit darzustellen. Auch die Maya hatten ein Symbol für die Null, das in einem positionellen Sinn verwendet wurde. Das positionale Zahlensystem mit der Null, wie wir es heute kennen, wurde jedoch hauptsächlich in Indien entwickelt. Indische Mathematiker, darunter Brahmagupta und Aryabhata, entwickelten das Konzept der Null als Zahl und als Positionszeichen im indischen Zahlensystem. Sie führten das Konzept von 'sunya' oder 'shunya' ein, was 'Leere' bedeutet, und begannen, das Symbol '0' zu verwenden, um dieses Konzept darzustellen.

Die Null wurde dann durch die arabische Kultur und den Handel in den Westen übertragen. Arabische Mathematiker übernahmen das indische System und führten es im mittelalterlichen Europa ein. Anfänglich wurde das Konzept der Null in Europa mit Skepsis betrachtet. Einige europäische Mathematiker betrachteten sie als 'Nichts' und nicht als reale Zahl. Es dauerte einige Zeit, bis das Konzept vollständig akzeptiert wurde.
Die Einführung der Zahl Null und des Positionszahlensystems revolutionierte die Infinitesimalrechnung und die Algebra. Sie erleichterte Berechnungen und ermöglichte die Entwicklung leistungsfähigerer Methoden zur Lösung von Gleichungen und zur Durchführung mathematischer Operationen.

Das Konzept der Null ist nicht nur eine Zahl, sondern hat in der Philosophie und Zahlentheorie eine breitere Bedeutung erlangt und steht oft für die Idee der Leere, der Abwesenheit oder des Anfangs. In Technik und Wissenschaft ist das Konzept der Null wesentlich für die Darstellung von Energieniveaus, Temperaturen und anderen physikalischen Größen. Es ist auch für die Darstellung von Binärsystemen in Computern unerlässlich.

Bei mathematischen Operationen ist die Null das neutrale Element in der Summe. Das Hinzufügen von Null zu einer beliebigen Zahl ändert den Wert der Zahl nicht. Zum Beispiel: $5+ 0 = 5$. Außerdem bleibt jede Zahl, die zur Potenz von Null erhoben wird, gleich sich selbst $n^0=1$.

<u>ONE</u>

Die Zahl Eins ist die einfachste der ganzen Zahlen und die grundlegende Einheit im Zahlensystem. Sie ist die erste und kleinste positive ganze Zahl und steht für die Idee der Einzigartigkeit, Individualität und Einzigartigkeit. Das mathematische Symbol für die Zahl Eins ist '1', das aus der alten römischen Notation stammt und an antike Kerben in Holz erinnert.
Bei mathematischen Operationen ist die Eins das neutrale Element der Multiplikation. Wenn Sie eine beliebige Zahl mit eins multiplizieren, ändert sich der Wert der Zahl nicht. Zum Beispiel, . Außerdem bleibt jede Zahl, die mit einer Potenz von eins multipliziert wird, gleich sich selbst und jede Zahl, die mit einer Potenz von eins erhöht wird, bleibt ebenfalls eins .

Im Binärsystem (Basis 2), das in Computern verwendet wird, wird jede Zahl durch eine Folge von '1' und '0' Bits dargestellt. Dieses Bit ist für die Darstellung digitaler Daten unerlässlich.

Die Zahl Eins gilt nicht als Primzahl, da Primzahlen genau zwei verschiedene positive Teiler haben müssen. Die Zahl Eins hat nur einen Teiler: sich selbst.

INFINITE

In der Mathematik wird das Symbol ∞ das "Unendlichkeitssymbol", sieht aus wie eine auf dem Kopf stehende Zahl 8 und steht für ein sehr interessantes Konzept: die Idee der Unendlichkeit. Denken Sie zum Beispiel an die natürlichen Zahlen. Stellen Sie sich vor, wir zählen sie auf: 0, 1, 2, 3, 4 und so weiter. Egal, wie weit wir gehen, wir werden nie mit dem Zählen aufhören, oder? Wenn Sie nach einer Zahl 1 addieren, erhalten Sie immer die nächste Zahl. Das ist ein bisschen wie das Unendlichkeitssymbol. Es sagt uns, dass wir immer weiterzählen können und ewig weitermachen.

Das Symbol der Unendlichkeit repräsentiert genau diese Idee der "Unendlichkeit der Elemente", des "ohne Ende".

Neben dem Zählen kann das Unendlichkeitssymbol auch in vielen anderen Situationen verwendet werden. In fortgeschritteneren mathematischen Problemen werden Sie es in Grenzwerten sehen, die so etwas wie "Was passiert, wenn etwas immer näher an die Unendlichkeit herankommt?" bedeuten. Auch wenn wir über Kurven sprechen, die sich einer Linie nähern, ohne sie jemals zu berühren, können wir das Unendlichkeitssymbol verwenden, um dieses Konzept darzustellen. Das Unendlichkeitssymbol beschreibt also etwas, das weitergeht, ohne jemals zu enden. Es ist ein bisschen so, als würde sich der Horizont bis ins Unendliche erstrecken, oder wie wir bereits gesehen haben, die Zahlenreihe, die ewig weitergeht.

Wenn Sie das Unendlichkeitssymbol sehen, denken Sie an etwas, das ohne Ende ist. Es ist ein bisschen wie eine offene Tür zu einer Welt der Möglichkeiten, die keine Grenzen hat!

Pädagogische Einblicke

Die Zahlen *e von* Nepero und *pi*, die irrational sind, und das komplexe Thema der Unendlichkeit sind im "Tessiner Pflichtschullehrplan" für die Grundschule nicht explizit enthalten, sondern sind "bemerkenswerte Zahlen", die auf späteren Schulstufen behandelt werden. Stattdessen werden die Zahlen 0 und 1 bereits in der Grundschule eingehend behandelt, sowohl als Elemente der Menge der natürlichen Zahlen, wobei für die 0 ihre grundlegende Rolle in unserem Positionsdezimalsystem betont wird, als auch als neutrale Elemente bestimmter Operationen.

Das Vorschlagen von Aktivitäten im Zusammenhang mit 'bemerkenswerten Zahlen' dient mehreren Zwecken:

- die Eigenschaften bestimmter Elemente unseres numerischen Systems zu erfassen;
- die Struktur unseres dezimalen Positionszahlensystems besser zu verstehen;
- lernen Sie einige wichtige Mathematiker der Vergangenheit kennen, die sich mit diesen außergewöhnlichen Zahlen beschäftigt haben, ihre Entdeckungen und ihre Bedeutung aus wissenschaftlicher und historischer Sicht;
- die Möglichkeit, ein bestimmtes mathematisches Thema zu vertiefen.

Was die Grundschule betrifft, so gehören das Thema Unendlichkeit und die Besonderheiten der Zahlen 0 und 1 in unserem Zahlensystem zu den Materialien des Projekts 'MaMa-Mathematik für die Grundschule'. Diese Materialien können Sie unter diesem Link kostenlos herunterladen: https://mama.edu.ti.ch/.

Wir empfehlen Ihnen insbesondere, sich zu informieren:

- Leitfaden für mathematische, pädagogische und historische Einblicke in die Menge der natürlichen Zahlen, die Rolle der Unendlichkeit und die Rolle der Zahlen 0 und 1 bei Operationen;

- die *didaktische Praxis* 'Aktivitäten zwischen Mathematik und Sprache im zweiten Zyklus', in der das Thema Kryptographie erkundet werden kann;

- die *Lernblätter* für Lernende, die Sie über das Filtersystem der Suchmaschine finden können Suchmaschine des Lehrmaterials finden. Besonders hervorzuheben sind: "Die Null in Plus und Minus", "Die Rolle der Null", "Die Null in der Division", "Die 0 in Dezimalzahlen", "Gerade oder ungerade?", "Natürlich oder gerade?", "Sprechen wir über Reihenfolgen", "Vielfache und Teiler von 1".

Die 0 ist der Protagonist einiger Kinderreime, Lieder und Spiele im Zusammenhang mit dem Projekt "A spasso con i numeri naturali" ("Ein Spaziergang mit den natürlichen Zahlen"), das vom Centro didattica della matematica del Dipartimento formazione apprendimento / Alta scuola pedagogica della SUPSI di Locarno zusammen mit RSI KIDS kuratiert wurde und demnächst online veröffentlicht wird.

Wenn Sie mehr über die Zahl *Pi* erfahren möchten, können Sie sich das amüsante Video "Televendita del π" aus der Reihe "Matematicando Ciak!" ansehen, die aus einer Sammlung von Videos für den Unterricht besteht. In dem Video "Auf der Suche nach der Null" hingegen ist gerade die erste natürliche Zahl der Protagonist. Um sich im Rhythmus der Musik zum Thema Unendlichkeit zu amüsieren, können Sie sich das Lied "L'infinito sai cos'è?" anhören.

Um mehr über die Zahl Pi *und* die Zahl und in der Geschichte zu erfahren und Aktivitäten für die Oberstufe zu identifizieren, können Sie die Aktivität "Wie real sind die transzendentalen Zahlen?" von Matabel oder den interessanten Podcast über *Pi* aus der Zeitschrift "Fantamatematica" (fast wahre Geschichten von Mathematikern und anderen Menschen mit Problemen) konsultieren.

Zum Thema Kryptographie können Sie das Poster "How to protect information?" herunterladen, das mit der Vorführung des Films "The Theory of Everything" verbunden ist, der im Rahmen des Matematicando Filmfestivals gezeigt wird.

In der vom Daedalus Verlag herausgegebenen Sammlung 'Mathematiker in Comics', die kostenlos heruntergeladen oder in gedruckter Form erworben werden kann, finden Sie 22 Geschichten zu wichtigen Mathematikern der Geschichte. Für einen ausführlichen Blick auf den Mathematiker, Physiker und Astronomen Leonhard Euler können Sie den Comic Euler (18. Jahrhundert) konsultieren, in dem ein berühmtes Theorem der Graphentheorie auf populäre Art und Weise behandelt wird. Für einen tieferen Einblick in einige historische Entdeckungen über die Unendlichkeit können Sie den Cantor-Comic (19. Jh.) herunterladen.

Bibliographische Referenzen für den Unterricht:
- Cerasoli, A. (2011). *Die großartigen Zehn*. Editorial Wissenschaft.
- Cerasoli, A. (2011). *Le avventure del signor 1*. Emme Edizioni.
- Cerasoli, A. (2015). *Alles zum Feiern mit Pi*. Science Publishing.
- Feniello, A. (2014). *Das Kind, das die Null erfand*. Laterza Verlag.
- Melis, A. (2007). *Prinz Null*. Piemme Editions.
- Novelli, L. (2015). *Hallo, ich bin Null*. Valentina Editionen
- Rittaud, B. (2014). *1, 2, 3... unendlich!* Daedalus-Editionen.
- Rodari, G. (1980). *Il trionfo dello zero*. EL Editions.

Darüber hinaus empfehlen wir Ihnen die folgenden Quellen für ein vertieftes historisches und pädagogisches Studium für Erwachsene:
- Arrigo, G., D'Amore, B. & Sbaragli, S. (2020). *Mathematische Unendlichkeit. Geschichte, Erkenntnistheorie und Didaktik eines faszinierenden Themas.* Pythagoras.
- D'Amore, B., Asenova, M., Del Zozzo, A., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., Nicosia, G. G., & Santi, G. (2021). *Zahlen. Mathematik, Geschichte, Spiele und Kuriositäten, für einen korrekten und effektiven Unterricht*. Pythagoras.
- D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2009). *Null*. Erickson.
- García del Cid, L. (2015). *Bemerkenswerte Zahlen*. RBA.
- Odifreddi, P. (2020). *Porträts der Unendlichkeit*. Rizzoli.
- Villani, V. (2003). *Bei Null anfangen.* Pythagoras.

ZÄHLEN TIERE?

Dieser Abschnitt ist frei inspiriert von diesem Link, auf den wir für weitere Details verweisen:
https://alessadra.wordpress.com/2010/01/18/animali-matematici-2/

Die Krähe, die bis 5 zählen konnte

(aus einer Geschichte aus den 1700er Jahren)

Ein Bauer versuchte, eine Krähe zu töten, die auf einem Turm auf seinem Land nistete, aber jedes Mal, wenn er sich näherte, flog die Krähe weg und kam erst zurück, als der Bauer ins Haus gegangen war. Der Bauer bat einen Nachbarn um Hilfe, aber die Krähe wich immer aus und kam erst wieder heraus, als beide ins Haus zurückgekehrt waren. Als die Zahl der Bauern zunahm, wartete die Krähe immer, bis alle wieder im Haus waren, bevor sie ins Nest zurückkehrte. Erst als fünf Bauern das Haus wieder betraten und einer draußen blieb, kehrte die Krähe ins Nest zurück und wurde getötet.

Das wirft die Frage auf, ob die Krähe nur bis fünf zählen kann. Studien, die der Ethologe Otto Koehler vor sechzig Jahren durchgeführt hat, deuten darauf hin, dass einige Vögel, wie z.B. die Krähe Jacob, die Anzahl der Punkte auf einem Deckel mit der Anzahl der Punkte auf einer Karte in Verbindung bringen und zwischen Zahlen von 2 bis 6 unterscheiden können. Tiere, einschließlich Vögel, haben die Fähigkeit, Mengen zu vergleichen und sich an aufeinanderfolgende Zahlen zu erinnern. Dem Kognitionspsychologen Stanislas Dehaene zufolge haben sowohl Tiere als auch Menschen eine intuitive Vorstellung von Mengen, auch wenn sie nicht so genau zählen wie wir.

Truthähne, Küken und andere mathematische Vögel

Nicht nur Krähen, sondern auch andere Vogelarten zeigen mathematische Fähigkeiten. Otto Koehler hat Truthähne darauf trainiert, Kastendeckel zu heben, um eine bestimmte Anzahl von Futterstücken zu erhalten, und aufzuhören, wenn sie die gewünschte Menge erreicht haben. Kanarienvögel wurden ebenfalls darauf trainiert, die fünfte Tablette zwischen kommunizierenden Käfigen zu wählen und so ihre numerischen Fähigkeiten zu demonstrieren. Der afrikanische Papagei Alex, der von der Psychologin Irene Pepperberg trainiert wurde, lernte ein umfangreiches Vokabular, einschließlich der Zahlen eins bis *sechs, und beantwortete Fragen nach der Anzahl der Gegenstände in einem Tablett richtig, obwohl er diese noch nie zuvor gesehen hatte.*

Jüngste Studien von Giorgio Vallortigara haben gezeigt, dass sogar Küken in der Lage sind, bis fünf zu zählen und Zahlen in aufsteigender Reihenfolge von links nach rechts zu ordnen, ähnlich wie der Mensch. Vögel zeigen also eine erstaunliche Fähigkeit, numerische Konzepte zu verstehen und zu nutzen.

Können Löwen zählen?

Bei dem von Karen McComb im Serengeti-Park in Tansania durchgeführten Experiment ging es um eine Löwin, die aus dem Hören von unbekanntem Gebrüll auf die Anwesenheit von Eindringlingen in ihrem Revier schloss. Als sie zunächst ein einzelnes Brüllen hörte, suchte die Löwin nach ihrer Gruppe, da sie eine Konfrontation auf Augenhöhe fürchtete. Später, als sie einen Chor von Brüllern hörte, schloss sie auf die Anwesenheit von drei Eindringlingen, befand sich aber in Gesellschaft von vier anderen Löwinnen aus ihrer Gruppe, so dass die Gesamtzahl der Eindringlinge fünf gegen drei betrug.

Die führende Löwin näherte sich der Stelle, von der das Gebrüll ausging, und stürzte mit den anderen in die Bäume. Sie fanden jedoch keinen Eindringling; das Gebrüll kam aus einem Lautsprecher, der in McCombs Experiment verwendet wurde. Brian Butterworth, Professor für Neuropsychologie am University College London, schlug vor, das Verhalten der führenden Löwin dadurch zu erklären, dass sie die gehörten Brüller und die Mitglieder ihrer Gruppe zählte und dann die beiden Zahlen verglich. Dies zeigt die Fähigkeit der Löwin, die Anzahl der Eindringlinge und Verteidiger unabhängig von der sensorischen Modalität, mit der sie sie wahrnimmt, zu abstrahieren und unterstreicht ihre bemerkenswerte Fähigkeit zur numerischen Wahrnehmung.

Gerissene Ratten

Experimente in den 1950er und 1960er Jahren zeigten, dass auch Ratten ein Zahlenverständnis besitzen. In einem Experiment wurden Ratten in einen Käfig mit zwei Knöpfen, 'A' und 'B', gesetzt. Um eine kleine Ration Futter zu erhalten, mussten sie eine bestimmte Anzahl von Malen auf den Knopf 'A' drücken, bevor sie auf den Knopf 'B' wechselten. Wenn sie in der vorgeschriebenen Reihenfolge einen Fehler machten, *bekamen sie eine Strafe, z. B. einen leichten elektrischen Schlag oder das Ausschalten des Lichts. Anfangs lernten die Ratten, mehrmals auf 'A' und nur einmal auf 'B' zu drücken, aber später verfeinerten sie die Anzahl der Drückvorgänge auf die vom Trainer vorgegebene Zahl 'n'.*

Die Zahl 'n' war nicht immer genau, aber die Ratten reagierten ungefähr, z. B. wenn sie 4 Mal auf 'A' drücken mussten, konnten sie 3 bis 7 Mal drücken. Das Experiment wurde weiter verfeinert, indem ein Lautsprecher eingeführt wurde, der Tonfolgen abgab. Damit wurde die Fähigkeit der Ratten bestätigt, die Anzahl von Objekten, Geräuschen oder Futterportionen ungefähr zu erkennen. Dies zeigt, dass sie in der Lage sind, ungefähre numerische Konzepte wahrzunehmen und zu verwenden.

Die mathematischen Fähigkeiten unserer Schimpansen-Vettern

Schimpansen haben in zahlreichen Experimenten bewiesen, dass sie über grundlegende arithmetische Fähigkeiten verfügen. Ein bemerkenswertes Beispiel ist Ai, der am Primatenforschungsinstitut der Universität Kyoto trainiert wurde. Er kann arabische Ziffern von 0 bis 9 in Verbindung mit Objekten erkennen und sie in auf- oder absteigender Reihenfolge sortieren. Sheba, ein weiterer Schimpanse, übertraf Ai nach intensivem Training und zeigte die Fähigkeit, Objekte zu addieren und das Ergebnis mit abstrakten Zahlensymbolen statt mit konkreten Objekten anzugeben.

Kanzi, ein Bonobo, ist ein "Genie" unter den Affen und lebt im Sprachforschungszentrum der Universität von Georgia in den USA. Er hat mehr als hundert Begriffe gelernt, weil er die Bemühungen seiner Mutter Matata, ihm die menschliche Sprache beizubringen, beobachtet hat. Kanzi kommuniziert jetzt mit Forschern, sogar aus der Ferne über das Telefon, und erkennt abstrakte Begriffe wie gut und böse. Damit zeigt er eine bemerkenswerte Fähigkeit, neben konkreten Begriffen auch Sprache und Konzepte zu verstehen. Diese Studien unterstreichen die erstaunlichen kognitiven und sprachlichen Fähigkeiten von Schimpansen und Bonobos.

Zirkusphänomene

Kluge" Tiere, die für Auftritte in Zirkussen und Theatern trainiert wurden, haben schon immer Interesse geweckt, oft durch Tricks mit Trainern. Ein bekanntes Beispiel ist Hans der

Kluge, ein deutsches Pferd, das von Wilhelm von Osten, einem Mathematiklehrer, trainiert wurde. Hans schien in der Lage zu sein, mathematische Probleme zu lösen und Wörter zu buchstabieren. Während der Vorführungen stellte das Publikum Fragen wie "Wie viel ist 4 + 6?", und Hans antwortete, indem er mit einem Huf die richtige Anzahl von Malen auf den Boden schlug.

Im Jahr 1904 wurde eine Untersuchungskommission unter dem Vorsitz von Carl Stumpf einberufen, um Hans' Fähigkeiten zu untersuchen. Nach einer gründlichen Analyse kamen sie zu dem Schluss, dass es bei seiner Darbietung keine Tricks gab. Oskar Pfungst, ein Schüler des Kommissionsvorsitzenden, wies jedoch nach, dass Hans von den Zuschauern oder von von Osten Signale erhielt, die ihm anzeigten, wann er mit dem Hufschlag aufhören sollte. Diese Signale waren unwillkürlich, wie z.B. eine Bewegung der Wimpern oder eine Veränderung der Spannung des Fragestellers, wenn sich das Pferd der richtigen Antwort näherte. In Wirklichkeit besaß Hans keine mathematischen Fähigkeiten, sondern reagierte auf unwillkürliche nonverbale Signale, die ihm sagten, wann er aufhören sollte. Dieser Fall zeigt, wie wichtig gründliche wissenschaftliche Untersuchungen sind, um die scheinbaren numerischen Fähigkeiten trainierter Tiere zu entschlüsseln.

Schlussfolgerungen

Das Potenzial und die Grenzen der mathematischen Intelligenz bei Tieren bleiben eine unbeantwortete Frage. Die Erforschung der Intelligenz von Tieren befindet sich noch im Anfangsstadium, aber neu verfügbare Untersuchungsinstrumente ermöglichen es, die Gehirnaktivität und die neuronalen Schaltkreise im Zusammenhang mit der Mathematik zu erforschen, auch wenn sie sich bei Tieren im Vergleich zum Menschen noch in einem frühen Stadium befinden.

Laut Stanislas Dehaene teilen Menschen mit Tieren wie Mäusen, Tauben und Affen eine mentale Repräsentation von Mengen, die es ihnen ermöglicht, schnell Mengen von Objekten zu nummerieren, Additionsoperationen durchzuführen und Kardinalitäten zu vergleichen, und das alles, ohne Sprache zu benötigen. Diese von der Evolution ererbten Fähigkeiten ermöglichen es uns, die Größe einer Menge abzuschätzen, und können auch das Verständnis von Zahlen beeinflussen, die symbolisch ausgedrückt werden, wie z.B. in arabischen Ziffern. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die von der Evolution ererbte Intuition für numerische Größen eine grundlegende Rolle bei der Entwicklung der fortgeschrittenen Mathematik beim Menschen spielen könnte. Dennoch bleiben viele Fragen offen, und die Forschung geht weiter, um die mathematischen Fähigkeiten von Tieren zu erforschen.

Pädagogische Einblicke

Das Thema der numerischen Kompetenz von Tieren erregt aus verschiedenen Gründen Aufmerksamkeit:

- verstehen, dass der Mensch nicht der einzige Wissensspeicher ist;
- Verbindungen mit der Umgebung herzustellen, insbesondere mit der Tierwelt;
- den Blick für die Interdisziplinarität öffnen.

Eine für Erwachsene geeignete Referenz, die nützlich ist, um das Thema weiter zu erforschen, ist die folgende:

- Bagini, B. & Dulio, P. (2016). *Mathematik für Kaninchen*. TAM Verlag.
- D'Amore, B. (2007). *Mathematik überall*. Pythagoras.

WIE VIELE GIBT ES?

DIE WEISHEIT DER MENGE

DIESER STANDORT KANN UNABHÄNGIG VON DEM FINGER- ODER DATENBEREICH SEIN, da die Idee darin besteht, zu zählen, wie viele Objekte sich in den Plexiglasbehältern befinden, aber da es schwierig ist, sie zu zählen, schätzen wir ihre Menge.

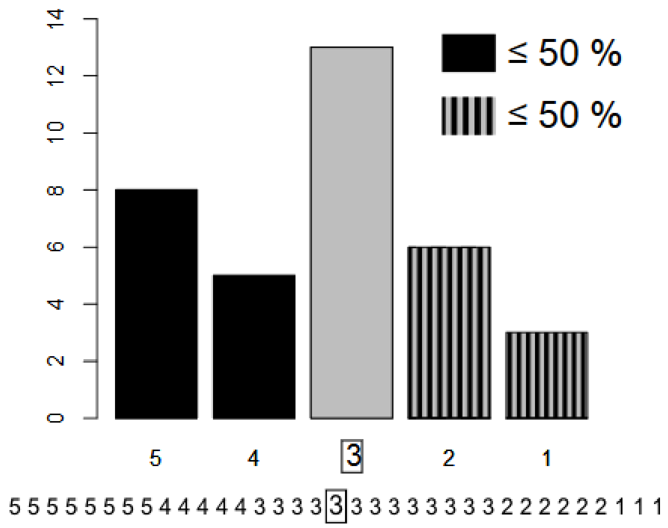
Was ist das? Wie viele Bonbons sind in dem Glasgefäß? Die Mathematik sagt uns, dass wir die beste Schätzung finden, indem wir an das appellieren, was Wissenschaftler "die Intelligenz der Menge" (oder die Weisheit der Menge) nennen, eine soziologische Theorie, nach der eine Ansammlung von Menschen jede Schätzung besser machen kann als Experten.

Und warum? Im Jahr 1906 bat der Anthropologe und Statistiker Francis Galton, ein Cousin des berühmten Charles Darwin, die Öffentlichkeit auf einer Viehmesse, das Gewicht eines Ochsen zu schätzen. Er sammelte alle Schätzungen und stellte fest, dass der Median - alle Werte in aufsteigender Reihenfolge, wobei der Median der mittlere Wert ist - der von der Menge gegebenen Antworten näher an der Realität lag als die von den anwesenden Experten einzeln gegebenen Antworten.
Mathematisch gesehen entspricht der Median eines Datensatzes dem Wert, der genau in der Mitte der geordneten Reihenfolge (auf- oder absteigend) der Daten liegt. Die Abbildung unten zeigt das Histogramm für einen Datensatz. Die Datenwerte sind:

5,5,5,5,5,5,5,5,4,4,4,4,4,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2,2,2,2,2,1,1,1 und entsprechen der Anzahl der Mitglieder in 34 Haushalten: Einige Haushalte bestehen aus nur einer Person, konkret gibt es 3 solcher Haushalte. Dann gibt es Haushalte mit 2, 3, 4 bis hin zu 5 Mitgliedern.

Der erste Schritt besteht darin, die Daten zu sortieren. In diesem Fall haben wir sie bereits in absteigender Reihenfolge sortiert.

Der zweite Schritt besteht darin, den Wert zu finden, der die mittlere Position einnimmt. Dieser Wert entspricht dem Median, in unserem Beispiel 3.



Tatsache: Die Theorie der "Crowd Wisdom" findet im Internet und insbesondere auf Seiten wie *Yahoo!* Answers und *Wikipedia* große Anwendung. Sie basieren auf dieser Theorie und stützen sich auf die Inhalte, die von einer großen Anzahl von Experten generiert werden, die zur Erstellung von *Wikipedia-Seiten* oder Antworten beitragen.

Learning Links: ***Grundlagen der Statistik (AVERAGE, AVERAGE, MODE). Siehe das Kapitel 'Schätzungen' für weitere Details.***

Externe Ressourcen:

(Auf Englisch) https://youtu.be/n98BhnwWmsc
Die Weisheit der Menge in der Praxis für einen Wettbewerb.

(Auf Englisch) https://www.scienceathome.org/
Dieses Projekt schlägt Spiele vor, die auf offenen Problemen basieren, z.B. in der Quantenphysik, mit der Absicht, Daten über die Spielsitzungen der Benutzer zu sammeln, um echte wissenschaftliche Forschung zu betreiben.

(Auf Englisch) https://www.zooniverse.org/

Wie die vorherige Version, aber ohne den Spielcharakter. Die Benutzer können ganz einfach zu wissenschaftlichen oder gemeinnützigen Studien beitragen (z. B. zum Hervorheben beschädigter Gebiete auf Satellitenbildern nach dem Erdbeben in Ecuador).

Pädagogische Einblicke

Es ist sehr sinnvoll, bereits in der Grundschule Erfahrungen mit verschiedenen Arten der *Schätzung zu machen.* Die wichtigsten Arten der Schätzung betreffen die *Numerosität* (d.h. numerische Größen), *Messungen* (sowohl von kontinuierlichen als auch von diskreten Größen) und *rechnerische* Aspekte (in Bezug auf die Ergebnisse von Berechnungen). Das obige Beispiel mit den Süßigkeiten befasst sich mit der Schätzung der Numerosität, bei der es um das Erkennen von Mengen mit mehr als 5-7 Elementen geht.

Wie in diesem Abschnitt erwähnt, ist es möglich, Erfahrungen mit dem Schätzen mit der Visualisierung von Mengen anhand von Diagrammen und Tabellen zu verknüpfen, ein weiteres Thema, das bereits in der Grundschule behandelt wird.

Solche Erfahrungen ermöglichen die Entwicklung verschiedener Ziele:

- Wissen, wie man das 'Auge für Wertschätzung' trainiert, sowohl direkt als auch indirekt;
- die Vorhersage der Größenordnung einer Menge, einer Größenordnung, einer Berechnung;
- das Vorhandensein eines Fehlers in der eigenen Schätzung im Vergleich zum exakten Wert akzeptieren können;
- in der Lage sein, verschiedene Strategien des Kopfrechnens zu verwenden und zu koordinieren;
- zu wissen, wie man eine Menge mit Hilfe verschiedener Darstellungsformen darstellt.

Was die Grundschule betrifft, so sind einige Ideen zum Thema Schätzen in den Materialien des Projekts 'MaMa - Mathematik für die Grundschule' enthalten. Diese Materialien können Sie unter diesem Link kostenlos herunterladen: https://mama.edu.ti.ch/.

Wir empfehlen Ihnen insbesondere, sich zu informieren:

- den *Leitfaden* für allgemeine mathematische und didaktische Erkenntnisse über das Schätzen in der Mathematik;
- die *Teaching Practices* 'Let's estimate how many', ein aufschlussreiches Dokument für den ersten Zyklus, und 'Let's estimate quantities and results', ein Dokument für den zweiten Zyklus, das aber auch für ältere Schüler geeignet ist.
- die *Lernblätter* für Lernende, die Sie finden, wenn Sie in der Suchmaschine für Lernmaterialien den Filter 'Schätzen' setzen. Unter den vielen Karten sind diejenigen, die sich speziell für ähnliche Arbeiten wie die in diesem Dokument vorgestellten eignen: "Behälter und Schätzen", "Schätzen zu zweit", "Obst auf einen Blick", "Wie viele Bonbons", "Im Zoo", "Sterne am Himmel", "Schätzungen vergleichen", "Wie viele Grundnahrungsmittel", "Wie viele Kichererbsen".

Über dasselbe Portal können Sie auch viele Materialien zur Verwendung und zum Lesen von Diagrammen und Tabellen abrufen. Wir empfehlen Ihnen insbesondere die folgenden Seiten:

- den *Leitfaden* für mathematische und didaktische Einblicke in die Verwendung und Umsetzung von Diagrammen und Tabellen sowie einige historische Hintergründe zu diesem Thema;
- die *Teaching Practices* "Let's play with graphs and tables", ein Dokument mit vielen Ideen für Aktivitäten zur Einführung in das Lesen und Erstellen von Diagrammen und Tabellen im Klassenzimmer;
- die für Schüler konzipierten *Lerntafeln*, die Sie finden können, indem Sie in der Suchmaschine für Lernmaterialien den Filter "Diagramme und Tabellen" setzen. Unter den vielen vorhandenen Karten sind die folgenden besonders geeignet für eine ähnliche Arbeit wie die in diesem Dokument über Histogramme vorgestellte: "Diagramme der Klasse 1", "Diagramme der Klasse 2", "Wetterprobleme", "Klassenbuch", "Alle in den Ferien", "Einen Film auswählen", "Freizeit", "Klassenumfrage", "Von der Tabelle zum Diagramm", "Weibliche Namen", "Podium der weiblichen Namen", "Alter der Bevölkerung", "Welche Sprachen sprechen Sie", "Zahlen und Familien", "Die Verbanella", "Schulbesuch", "Obst und Gemüse".

Indem Sie das didaktische Blatt "Wir schätzen mit den Sinnen" auf der Website "Matematicando" (matematicando.supsi.ch), das für Schüler des ersten Zyklus der Grundschule geeignet ist, erhalten Sie didaktische Ideen für das spielerische Schätzen von Mengen nicht nur durch das Sehen. Für den zweiten Zyklus der Primarschule finden Sie weitere Ideen in den Merkblättern 'Schätzen wir uns selbst' und 'Schätzen im Quadrat'. Eine komplexere Version des letzten Lehrblatts, die für die Mittelstufe geeignet ist, ist unter dem gleichen Namen 'Schätzen im Quadrat' erhältlich.

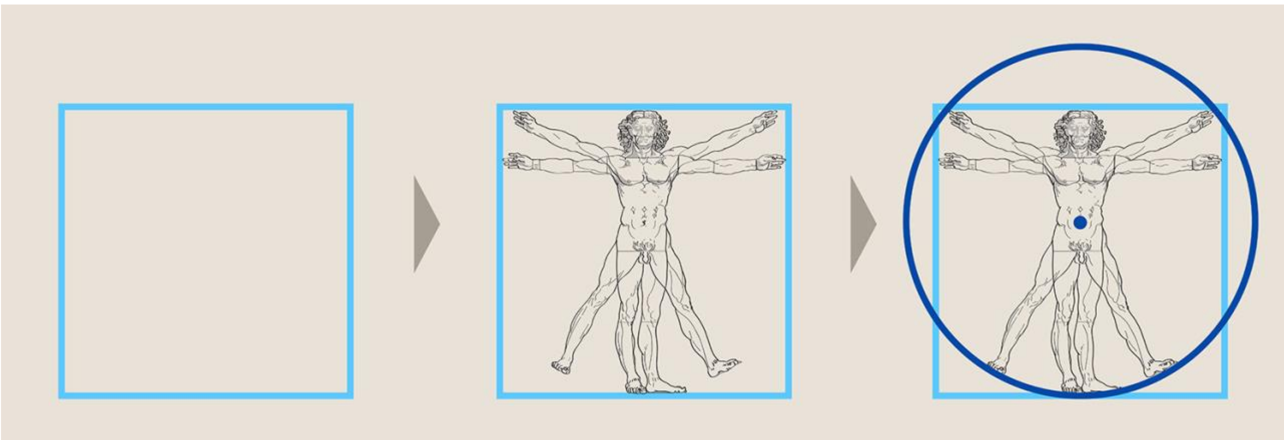
Die folgenden Texte, die bereits für die Grundschule geeignet sind, konzentrieren sich auf die Visualisierung großer Mengen von Elementen. Sie können daher didaktisch eingesetzt werden, indem Sie den Schülern die Illustrationen zeigen und sie auffordern, die Menge der dargestellten Elemente zu schätzen und dann durch Zählen zu überprüfen (bei kleinen Mengen) oder die Zahlen direkt auf der Seite zu lesen (bei größeren Mengen).

- Tessaro, G. (2012). Viele *viele viele*. Carthusia.
- Fromental, J. L., & Jolivet, J. (2017). *365 Pinguine*. Der Biber.
- Roskifte, K. (2019). *Jeder ist wichtig*. EL Editions.

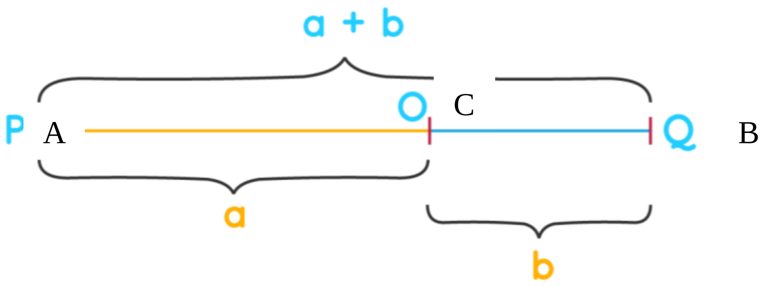
AUREAN NUMBER

Was ist das? Der vitruvianische Mensch ist eine Zeichnung von Leonardo da Vinci aus der Zeit um 1490, die einen Mann in zwei übereinanderliegenden Positionen innerhalb eines Kreises und eines Quadrats zeigt. Der Zweck der Zeichnung war es, die idealen Proportionen eines Körpers darzustellen und zu demonstrieren, wie er in den Kreis und das Quadrat, die beiden 'perfekten' geometrischen Figuren, eingeschrieben werden kann. Das Werk heißt so, weil es von der Arbeit des griechischen Architekten und Philosophen Marcus Vitruvius Pollonius inspiriert wurde, der im Jahr 15 v. Chr. folgendes schrieb

> *"Außerdem ist das Zentrum des menschlichen Körpers von Natur aus der Nabel. Denn wenn Sie einen Mann auf den Rücken legen, Hände und Füße weit gespreizt, und einen Zirkel auf seinen Nabel richten, werden Sie tangential die Enden der Finger seiner Hände und Füße berühren und einen Kreis beschreiben*.



Und warum? Die perfekte Proportion (oder der goldene Schnitt) des Körpers innerhalb eines Kreises kann durch ein Segment dargestellt werden, das in zwei Teile *a* und *b* unterteilt ist, wobei *a+b* die Gesamthöhe der Person und *a* die Entfernung vom Boden bis zum Nabel darstellt, so dass das Verhältnis von *a+b* zu *a* gleich dem Verhältnis von *a* zu *b* ist. Daraus ergibt sich, dass der Goldene Schnitt wie folgt lautet: .
Konkret: Um perfekte Proportionen zu haben, sollte eine große Person den Bauchnabel auf etwa über dem Boden liegen.



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1.618.... = \phi$$

Learning Links: ***Wie man rechnet***

Der goldene Schnitt des Segments AB ist das Segment AC, mit C zwischen A und B, dem proportionalen Durchschnitt zwischen dem gesamten Segment AB und dem restlichen Teil CB, d.h.

$$AB : AC = AC : CB$$
$$AB : AC = AC : (AB - AC)$$

Wir zeigen an $AB = x$
e $AC = a$

$$x : a = a : (x - a)$$
$$a^2 = x \cdot (x - a)$$
$$x^2 - ax - a^2 = 0$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grades in der Unbekannten x die zwei Lösungen zulässt, von denen nur eine akzeptabel ist, weil sie positiv ist:

$$x_1 = a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

An dieser Stelle definieren wir den ***Goldenen*** Schnitt als das Verhältnis

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ d. h:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Was ist daran so besonders φ ?

- Das Quadrat von ist gleich erhöht um 1: $\varphi^2 = \varphi + 1$
- Der Kehrwert von φ ist gleich minus $1 : \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$

– Die Eigenschaften, die wir gerade erklärt haben, zeigen unter anderem, dass das Quadrat und der Kehrwert von denselben Dezimalteil haben wie φ :

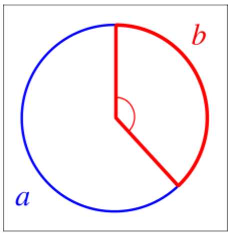
$$\varphi = 1{,}6180339887 \ldots$$

$$\varphi^2 = 2{,}6180339887 \ldots$$

$$\frac{1}{\varphi} = 0{,}6180339887 \ldots$$

Außerdem, φ die einzige Zahl ist, für die diese Situation (natürlich nur, wenn wir die natürlichen Zahlen ausschließen).

In der Geometrie ist der **Goldene Winkel** der Winkel, den der kleinste Bogen eines Kreises einschließt (der Bogen in Rot in der nebenstehenden Abbildung), den man erhält, wenn man den Kreis selbst in zwei Bögen teilt, die im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie der Goldene Schnitt. Der Wert dieses Winkels ist $137^\circ\,30'$.

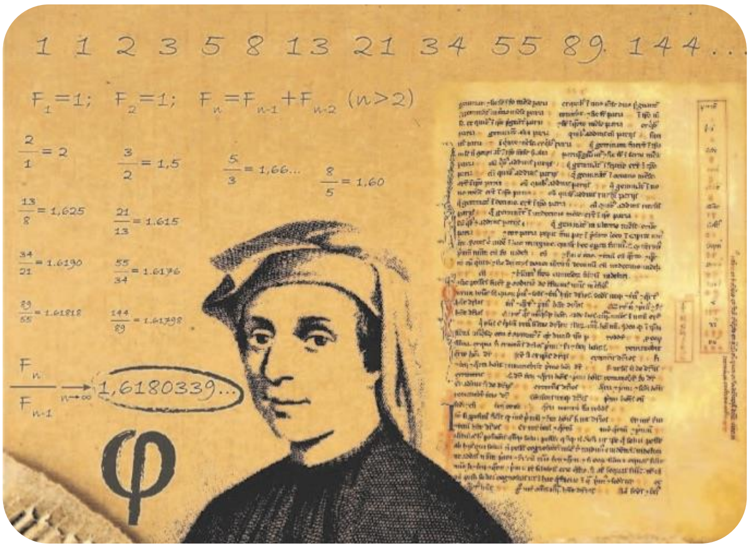


Kuriosität**:** Für uns ist das nur eine nette Kuriosität, aber seit Jahrhunderten steht der Goldene Schnitt für die Idee von Harmonie und Perfektion. Außerdem gibt es keine wissenschaftlichen Beweise dafür, dass diese Proportionen 'schöner' sind als andere, es bleibt also nur eine Frage des Geschmacks und der Kultur.

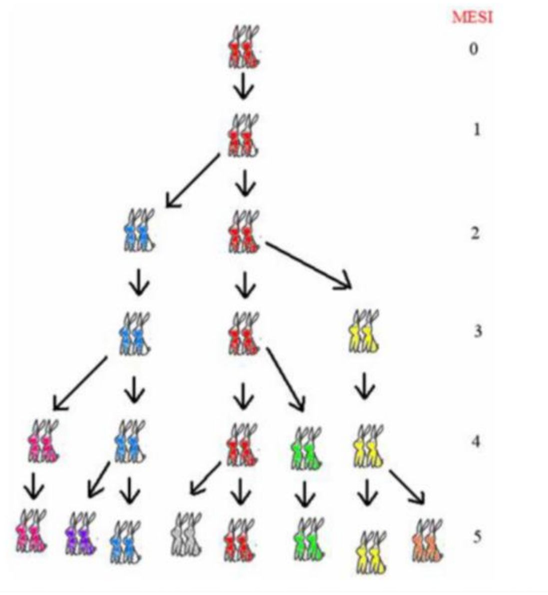
Andere externe Ressourcen:
http://wsimag.com/it/cultura/2004-le-divine-proporzioni
Artikel von Piergiorgio Oddifreddi über die Proportionen, die die Kunst inspirieren.

MATHEMATIK UND NATUR

DIE FIBONACCI-FOLGE



$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,\ 21, 34, \ldots$ Diese Folge, bei der sich jede Zahl aus der Summe der beiden vorangehenden Zahlen ergibt, ist nach Leonardo Pisano, genannt Fibonacci (1175-1240), einem Mathematiker des 13. Jahrhunderts, benannt. Sein Vater war ein Kaufmann, der in ständigem Kontakt mit den Völkern Nordafrikas stand. So konnte Leonardo nach Ägypten, Syrien und Griechenland reisen und die wichtigsten arabischen Mathematiker treffen und die Algebra und das indo-arabische Notationssystem erlernen, das uns überliefert ist. Im Jahr 1202 schrieb er den Liber Abaci, ein Werk, das Europa in das indoarabische Notationssystem, die Dezimalzahl und die Null - oder zefr, vom arabischen zefiro - einführte, d.h. eine leere Zahl wie der 'Windhauch', der durch die Bewegung der Ziffern, wie der Wind die Dinge bewegt, ihren Wert trotz ihrer Unbeständigkeit verändert.



Die Fibonacci-Folge entstand aus einem Problem des Liber Abaci: "*Wie viele Kaninchenpaare gibt es in einem Jahr, außer im Todesfall, wenn man annimmt, dass jedes Paar jeden Monat ein anderes Paar zur Welt bringt und dass die jüngsten Paare sich bereits im zweiten Lebensmonat fortpflanzen können?*"

Die Antwort lautet wie folgt: Am Ende des ersten Monats haben Sie das erste Paar; am Ende des zweiten Monats haben Sie das ursprüngliche Paar und ein neues Paar, das von diesem erzeugt wurde; am Ende des dritten Monats kommt ein drittes Paar hinzu; am Ende des vierten Monats haben Sie fünf Paare, weil auch das zweite Paar begonnen hat, sich zu generieren, und so weiter:

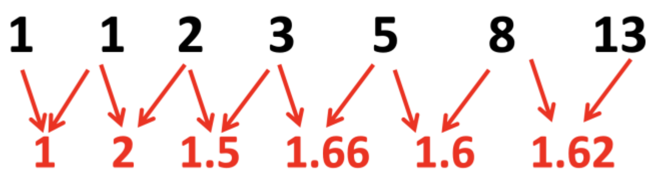
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711 \ldots$

Die Fibonacci-Folge verfügt über viele elegante und bedeutende Eigenschaften. Lassen Sie uns einige von ihnen betrachten:

- Zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen haben keine gemeinsamen Faktoren, d.h. sie sind zueinander primär (koprim), mit anderen Worten, ihr größter gemeinsamer Teiler ist gleich 1.
- Jede Zahl in der Folge zum Quadrat ist gleich dem Produkt aus der vorangehenden Zahl und der nachfolgenden Zahl, erhöht oder vermindert um eine Einheit.

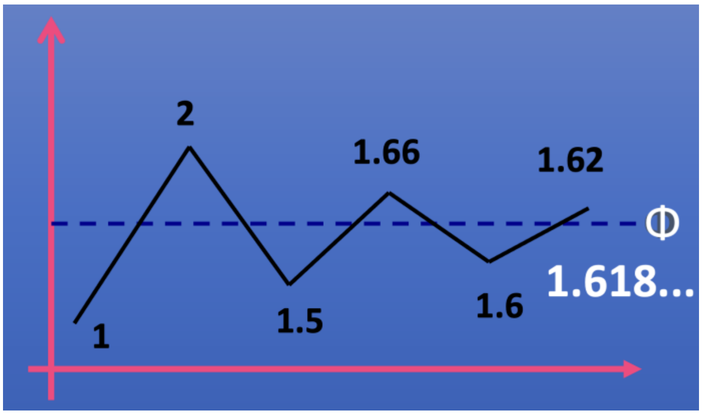
Zum Beispiel $21^2 = 441 = 13 \times 34 - 1$
während $89^2 = 7921 = 55 \times 144 + 1$

- Die Folge, die sich aus den Verhältnissen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Termen der Fibonacci-Folge ergibt, ist eine Folge, deren erste Terme sind:



$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{55}{34}$	$\frac{89}{55}$	$\frac{144}{89}$	....
1	2	1,5	1,666	1,6	1,625	1,615	1,619	1,617	1,61818	1,6179	...

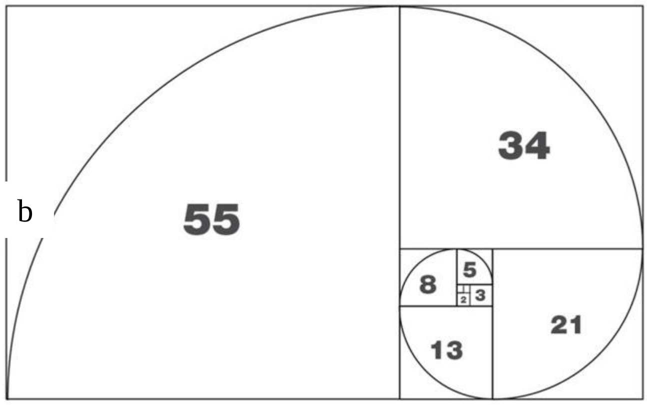
Die Grenze dieser Abfolge ist die "Goldene Zahl" oder der "Goldene Schnitt". Sie ist seit der Antike für ihre seltsamen Eigenschaften bekannt und wird zu Ehren von Fibonacci mit dem griechischen Buchstaben ϕ (phi) bezeichnet. Es handelt sich um eine irrationale Zahl: Ihre Dezimalziffern gehen ohne erkennbares Muster ins Unendliche! Der 'Goldene Schnitt' wurde von Leonardo da Vinci als 'göttliche Proportion' bezeichnet.



Spiralen und Fibonacci-Zahlen

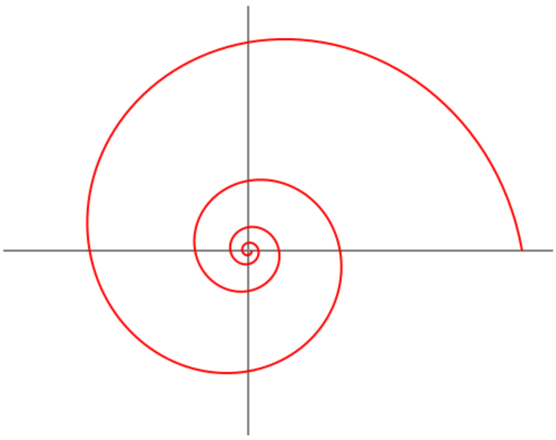
Die Zahlen der berühmten Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 können verwendet werden, um entsprechende Quadrate zu zeichnen, wie in der Abbildung zu sehen ist: Diese Reihe von Rechtecken, deren Seitenlängen gleich den aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen sind und die aus Quadraten mit Seiten bestehen, die Fibonacci-Zahlen sind, werden Fibonacci-Rechtecke genannt. Wenn wir in jedem Quadrat ein Viertel eines Kreises nachzeichnen, erhalten wir die Fibonacci-Spirale, die der sogenannten *Goldenen Spirale* sehr nahe kommt: eine besondere logarithmische Spirale, die mit jeder Vierteldrehung um die goldene Zahl φ zunimmt.

a



Spiralen sind jedoch nicht alle gleich: Je nach gewähltem Gesetz gibt es Archimedes-Spiralen, Galileo-Spiralen, Fermat-Spiralen, logarithmische Spiralen, hyperbolische Spiralen und einige andere. Wie zeichnet man eine Spirale mathematisch? Zeichnen Sie mit einem Bleistift von einem zentralen Punkt aus und verschieben Sie ihn einfach um eine Strecke *r* und drehen Sie ihn gleichzeitig um einen Winkel, wobei Sie einer Regel folgen, die *r* wie folgt ändert . Bestimmte Parameter (*a*, *b*) tragen zur Verformung der Spirale bei, auch wenn die Regel immer gleich bleibt.

logarithmische Spirale ()	Fermat-Spirale ( )
hyperbolische Spirale ()	Archimedische Spirale ()



Logarithmische Spirale

Es scheint, dass die logarithmische Spirale als Modell, wenn auch immer nur annähernd, für viele natürliche Strukturen dient. Es ist eine Form, die aufgrund ihrer ästhetischen und mathematischen Eigenschaften seit Jahrhunderten die Fantasie von Künstlern und

Wissenschaftlern beflügelt. So sehr, dass Bernoulli sie *spira mirabilis* nannte und eine solche auf seinem Grabstein eingraviert haben wollte - leider hat der Bildhauer stattdessen eine von Archimedes angefertigt!

Die Spirale ist eine der faszinierendsten Strukturen, die im Universum vorkommen.

FIBONACCI-ZAHLEN IN DER NATUR

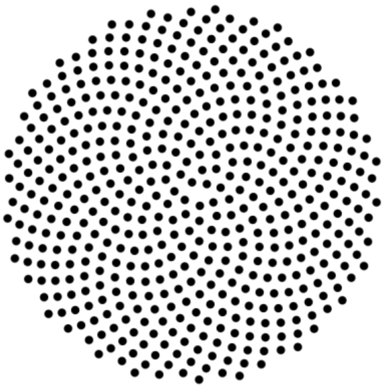
Eine der Besonderheiten der Fibonacci-Zahlen ist, dass sie häufig in der Natur vorkommen.

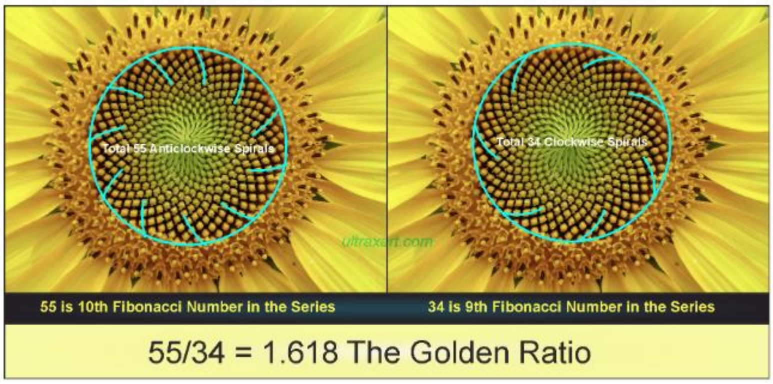
Was diese Verbindung interessant macht, ist, dass Blumen, indem sie der Fibonacci-Folge folgen, den Raum und die Effektivität ihrer Exposition gegenüber Sonnenlicht und bestäubenden Insekten maximieren können. Eine Anordnung von Blütenblättern oder Samen, die dieser Sequenz folgt, ermöglicht es den Blumen, optimal positioniert zu sein, um Licht und Insekten aus verschiedenen Winkeln einzufangen. Für Pflanzen ist es vorteilhaft, mehr Samen zu tragen, da dies die Chancen der Art erhöht, sich zu vermehren.

Es ist jedoch wichtig zu beachten, dass diese Regel nicht für alle Blumen gilt, da es viele Faktoren gibt, die die Anzahl der Blütenblätter beeinflussen, darunter die Genetik, die Umwelt und andere Variablen.

Zum Beispiel:

- Bei **Sonnenblumen** trägt die zentrale Scheibe (der Blütenkopf) eine Vielzahl von Primordien, die sich mit zunehmender Reife zu kleinen Blüten und dann zu Samen entwickeln. Aber wie sind all diese Primordien auf so engem Raum angeordnet? Die erste (Apex genannt) wird in der Mitte geboren, die folgenden werden jeweils um einen bestimmten Winkel (goldener Winkel von in Verbindung mit der Goldenen Zahl) relativ zum vorhergehenden gedreht. Die Samen sind in einer spiralförmigen Struktur angeordnet. Diese Spiralen sind mit den Fibonacci-Zahlen verknüpft. Außerdem folgt das Verhältnis der in diesen Spiralen angeordneten Samen dem goldenen Schnitt ϕ. Das bedeutet, dass die Anzahl der Spiralen im Uhrzeigersinn oft eine Fibonacci-Zahl ist, während die Anzahl der Spiralen gegen den Uhrzeigersinn oft die nächste Fibonacci-Zahl ist.



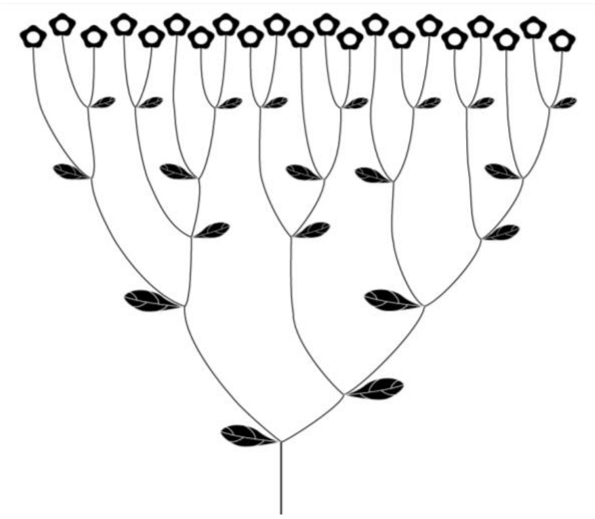


- **Gänseblümchen** werden oft als Beispiel für Blumen mit Blütenblättern, die der Fibonacci-Folge folgen, angeführt. Es ist bekannt, dass sie 21 oder 34 Blütenblätter haben.
- **Hyazinthen** sind Zwiebelblumen mit einer Anordnung von 3, 5 oder 8 Blütenblättern.
- **Lilien** können eine Anordnung der Blütenblätter haben, die der Fibonacci-Folge ähnelt, mit 3, 5 oder 8 Blütenblättern.
- **Ringelblumen** sind Blumen mit oft 21 oder 34 Blütenblättern.
- Die **Hahnenfußblüte** kann 5, 8 oder 13 Blütenblätter haben.
- Achillea Ptarmica (auch bekannt als **Sternutella**) ist eine Pflanze, die im Sommer blüht und viele kleine weiße Blüten hervorbringt, eine pro Zweig. Wie so oft in der Natur scheint ihr Wachstum einem genauen Muster zu folgen: ein Zweig erzeugt einen neuen, der nach einem Monat einen weiteren hervorbringt und so weiter. Wie viele Zweige und damit kleine Blüten werden nach einem Jahr erscheinen? Ein einfaches mathematisches Schema kann helfen, dieses Problem zu lösen.

  Der erste Schritt besteht darin, ein vereinfachtes Diagramm der Pflanze mit den Zweigen Monat für Monat zu zeichnen, wobei zu berücksichtigen ist, dass sich ein neuer Zweig erst nach einem Monat abspalten kann. Die Anzahl der Zweige nimmt schnell zu und das Muster wird bald kompliziert. Um zu verstehen, was nach zwölf Monaten geschieht, können Sie erkennen, dass es in diesem Muster eine Regel gibt. Tatsächlich ist die Anzahl der Zweige, die jeden Monat entstehen, die Summe der Zweige der beiden Vormonate:

$$21 = 13 + 8,\ \ 13 = 8 + 5,\ \ 8 = 5 + 3,\ \ 3 = 2 + 1$$

  Die Anzahl der Zweige bringt die Fibonacci-Folge zum Vorschein.



- Spiralen können auch bei anderen **Pflanzen** wie Blumenkohl, Kiefernzapfen und Kakteen beobachtet werden.
- Nautilusschalen, Chamäleonschwänze, Galaxien, gerollte Blätter, Schneckenhäuser, Rosenblätter... Spiralformen sind in der Natur häufig anzutreffen.

- Die *Cochlea* - vom lateinischen *cochlea*, Schnecke - ist eine Struktur in unserem Innenohr, die einer Spirale ähnelt. Die rechte Cochlea hat eine Spirale gegen den Uhrzeigersinn, während die linke Cochlea eine Spirale im Uhrzeigersinn hat.

Pädagogische Links: ***Irrationale Zahlen.***

Es ist bemerkenswert, dass viele der wichtigsten Zahlen in der Mathematik irrational sind (π, e, φ), d.h. Zahlen mit unendlich vielen Dezimalstellen, die sich nicht wiederholen. Es kann viel über ihre Eigenschaften gesagt werden, hier genügt der Hinweis, dass die Definition von φ als "die irrationalste aller irrationalen Zahlen" von der Schwierigkeit herrührt, sie mit *kontinuierlichen Brüchen* zu approximieren. Dies ist eine alternative Darstellung zur Dezimaldarstellung, die effektiver ist, um jede reelle Zahl mit rationalen Zahlen zu approximieren:

$$numero = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots\cdots}}}$$

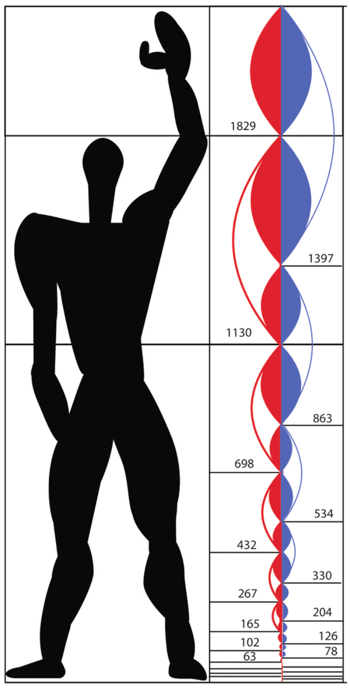
Wobei $a_{0,1,2,3,\ldots}$ alle ganze Zahlen sind. Je mehr Sie den Bruch erweitern, desto mehr verbessert sich die Genauigkeit der Annäherung, als ob Sie ein feineres Lineal zur Darstellung der Zahl verwenden würden. Jede reelle Zahl, also auch eine irrationale, kann auf diese Weise dargestellt werden, zum Beispiel:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{\cdots\cdots}}} \qquad \text{während} \qquad \varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\cdots\cdots}}}$$

Das Vorhandensein von 1 überall in der Darstellung von φ führt dazu, dass die Genauigkeit nur sehr langsam ansteigt, was sie zur schlechtesten Annäherung mit rationalen Zahlen macht.

Andere externe Ressourcen:
https://it.wikipedia.org/wiki/Frazione_continua
Kontinuierliche Brüche auf Wikipedia.
(Auf Englisch) http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/
Eine wahre Fundgrube für Informationen über die Goldene Zahl und andere mathematische Kuriositäten.

Pädagogische Verbindungen: ***Mathematik und Kunst.***



In der Vergangenheit wurde angenommen, dass der Goldene Schnitt zahlreiche Architekten der Antike und insbesondere die Erbauer des Parthenon und der Pyramiden inspiriert hat, da Teile dieser Gebäude dem Verhältnis entsprechen, das durch diese Proportion ausgedrückt wird. In Wahrheit gibt es keinen Beweis dafür, dass der Goldene Schnitt beim Bau dieser Monumente jemals absichtlich verwendet wurde.
Der Schweizer Architekt Le Corbusier (1887-1965) hat einen Teil seiner architektonischen Arbeit auf die Fibonacci-Reihe und den Goldenen Schnitt gestützt und ein System architektonischer Maßstäbe namens 'Modulor' entwickelt. Der Begriff 'Modulor' ist eine Kombination aus den Wörtern 'Modul' und 'd'or' (golden) und erinnert an das Konzept der goldenen Proportion (goldene Zahl) in der Mathematik. Le Corbusiers Ziel war es, eine Maßskala zu schaffen, die auf den menschlichen Proportionen und dem Konzept der mathematischen Harmonie basierte und als Richtschnur für Designentscheidungen wie Bodenhöhen, Möbelhöhen, Fensterverhältnisse und vieles mehr diente. Die Theorie war, dass die Befolgung des Modulors zu architektonischen Räumen und Entwürfen führen würde, die von der Person, die sie benutzt, als angenehm und harmonisch empfunden werden. Der Modulor wurde in verschiedenen architektonischen Projekten von Le Corbusier angewandt, wie dem 'Modulor 1' und dem 'Modulor 2', und hatte einen bedeutenden Einfluss auf das architektonische Design und die Designtheorie.

Pädagogische Verbindungen: ***Mathematik und Musiktheorie.***

Eine außergewöhnliche Erfindung wie die Fibonacci-Folge findet eine breite Anwendung in anderen Disziplinen als der Mathematik, einschließlich der Musik, wo sie als reine melodische Natur ausgedrückt wird. Ordnen Sie jeder Zahl eine Musiknote zu: C = 1, D = 2 usw. und betrachten Sie eine diatonische Tonleiter mit 7 Noten: C-RE-MI-FA-SOL-LA-SI. Mit Hilfe der *Modulo-Operation ist es* möglich, die sieben natürlichen Noten an die unendliche Folge von Zahlen anzupassen. Mit dieser Operation wird jede Zahl zum Rest ihrer Division durch 7.

Z.B. $15 = 2 \times 7 + \mathbf{1}$, perciò 15 = **1** (*mod*7).

Wenn Sie die Operation mit der n-ten Zahl *mod* 7 durchführen, erhalten Sie die Ergebnisse in der folgenden Tabelle, in der die Fibonacci-Folge in der ersten Spalte und die entsprechende Zahl *mod* 7 in der zweiten Spalte aufgeführt ist.

N. succ.	N. mod 7
1	1
1	1
2	2
3	3
5	5
8	1
13	6
21	0
34	6
55	6
89	5
144	4
233	2
377	6
610	1
987	0
1.597	1
2.584	1
4.181	2
6.765	3
10.946	5

N. succ.	N. mod 7
17.711	1
28.657	6
46.368	0
75.025	6
121.393	6
196.418	5
317.811	4
514.229	2
832.040	6
1.346.269	1
2.178.309	0
3.524.578	1
5.702.887	1
9.227.465	2
14.930.352	3
24.157.817	5
39.088.169	1
63.245.986	6
102.334.155	0
165.580.141	6
267.914.296	6

N. succ.	N. mod 7
433.494.437	5
701.408.733	4
1.134.903.170	2
1.836.311.903	6
2.971.215.073	1
4.807.526.976	0
7.778.742.049	1
12.586.269.025	1
20.365.011.074	2
32.951.280.099	3
53.316.291.173	5
86.267.571.272	1
139.583.862.445	6
225.851.433.717	0
365.435.296.162	6
591.286.729.879	6
956.722.026.041	5
1.548.008.755.920	4
2.504.730.781.961	2
4.052.739.537.881	6
6.557.470.319.842	1

Daraus ergibt sich eine Folge von Zahlen zwischen 0 und 6, die sich wie folgt in die sieben Musiknoten umwandeln lassen:

1	2	3	4	5	6	0
DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI

Auf dieser Grundlage ist es möglich, bestimmte Akkorde zu konstruieren, die harmonisch mit der Spirale in unserem Ohr mitschwingen und eine angenehme Erfahrung hervorrufen, einschließlich der Noten, deren Position in der Tonleiter mit den Fibonacci-Zahlen verbunden ist, z.B. 3-5-8. Bei den Zahlen, die nicht direkt mit der diatonischen Tonleiter verbunden sind, gehen wir wie folgt vor. Die Zahlen der Folge nach der Modulo-Operation sind gegeben durch:

1	1	2	3	5	1	6	0	6	6	5	4	2	6	1	0
DO	DO	RE	MI	SOL	DO	LA	SI	LA	LA	SOL	FA	RE	LA	DO	SI

Durch rekursives Ersetzen sehen wir, dass sich die musikalische Sequenz alle sechzehn Noten identisch wiederholt. So erhalten wir eine Melodie, die in einer einzigen Oktave gespielt werden kann. Dabei werden die Noten nicht berührt, die nicht mehr wahrnehmbar oder verständlich wären, wenn sie aufgewirbelt würden.

Andere externe Ressourcen:
https://emercurius.wordpress.com/2011/09/12/fra-numeri-e-musica-2/
Informeller Einblick in die 'Musik' der Fibonacci-Folge.

Pädagogische Einblicke
Sukzessionen, insbesondere die bekannte Fibonacci-Sukzession, werden bereits in der Grundschule mit folgenden Zielen vorgeschlagen:
- sich der Idee der Rekursivität nähern;
- Lernen Sie einen bekannten Mathematiker aus der Geschichte kennen, um die Mathematik 'menschlicher' zu machen;
- Verknüpfung von Mathematik mit anderen Fachbereichen;
- Mathematik mit realen Kontexten zu verbinden.

Die Zahl φ oder die *Goldene Zahl hingegen* ist nicht Teil des Lehrplans der Grundschule, kann aber auf jeden Fall auf dieser Schulstufe auf intuitive Art und Weise präsentiert werden, indem sie in verschiedene Kontexte gestellt wird und später in der Mittel- und Oberstufe mathematisch vertieft wird.
Der Vorschlag, die *goldene Zahl* in der Ausbildung der Schüler zu verwenden, ermöglicht es, zusätzlich zu den bereits im Abschnitt "Bemerkenswerte Zahlen" vorgeschlagenen Zielen, insbesondere
- sich mit den mathematischen Eigenschaften einer bestimmten Art von Zahlen zu beschäftigen;
- Verbindungen zwischen Mathematik und anderen kulturellen Bereichen zu finden;
- Mathematik in realen Kontexten zu begreifen.

Was die Grundschule betrifft, so finden Sie in den Materialien des Projekts "MaMa-Mathematik für die Grundschule" eine Reihe von Ideen zum Thema Reihenfolgen (einige davon beziehen sich auf die Fibonacci-Reihenfolge). Diese Materialien können Sie unter diesem Link kostenlos herunterladen: https://mama.edu.ti.ch/.
Wir empfehlen Ihnen insbesondere, sich zu informieren:
- den *Leitfaden* für allgemeine mathematische und didaktische Einblicke in das Thema Sukzessionen;
- die *Teaching Practices "Discovering Successions"*, ein inspirierendes Dokument für den ersten Zyklus, und "Let's sharpen our wits with successions", ein Dokument für den zweiten Zyklus, das aber auch für ältere Schüler geeignet ist.
- die *didaktischen Blätter* für Schüler, die Sie finden, indem Sie den Filter 'Sukzessionen' in der Suchmaschine für Unterrichtsmaterialien setzen. Unter den zahlreichen Karten ist die Karte "Das

Kaninchenproblem" besonders geeignet, um das Kaninchenproblem und damit die Fibonacci-Folge zu entdecken.

Über dasselbe Portal können Sie auch einige Materialien abrufen, die sich auf interdisziplinäre Verbindungen zwischen Mathematik und Kunst sowie Mathematik und Natur beziehen. Wir empfehlen Ihnen insbesondere die folgenden Seiten:
- die *Bedeutungskontexte* 'Persönliche Zahlen' und 'Mathematik und Kunst', in denen motivierende Situationen vorgeschlagen werden, die die *goldene Zahl* und die Proportionalität im menschlichen Körper und in künstlerischen Kontexten betreffen;
- die *Unterrichtspraktiken* 'Mathematik und Kunst im ersten Zyklus' und 'Mathematik und Kunst im zweiten Zyklus', in denen u.a. Unterrichtsvorschläge im Zusammenhang mit der *Goldenen Zahl* und den göttlichen Proportionen in Kunstwerken gesammelt werden.

Unter den Veröffentlichungen außerhalb der MaMa-Plattform empfehlen wir das didaktische Übungsbuch 'In arte... Matematica!' aus der Reihe *Praticamente,* das eine Erfahrung aus dem Grundschulunterricht im Zusammenhang mit der Entdeckung der Fibonacci-Folge, der goldenen Zahl und ihrer Anwendungen in der Welt der Kunst wiedergibt.

Einen Comic von Leonardo Pisano, bekannt als Fibonacci, finden Sie in der Sammlung 'Mathematici a fumetti' unter der Überschrift Fibonacci (13. Jahrhundert), wo seine berühmte Folge, die für die Grund- und Mittelschule geeignet ist, ebenfalls auf amüsante Weise dargestellt wird.

Um mehr über die Fibonacci-Folge zu erfahren, sehen Sie sich das unterhaltsame Video "Die Fibonacci-Folge" aus der Serie "Mathematik Ciak!", die aus einer Sammlung von Lehrvideos besteht, die sich an Grund- und Sekundarschulen richten.

"Eine goldene Figur" ist der Titel einer Geschichte, eines Kinderreims und eines Liedes, die für Grundschulen im Rahmen des Projekts "Eine Welt der Zahlen" entwickelt wurden. Ein Projekt, das vom Zentrum für Mathematikdidaktik der Abteilung Lernen / Alta scuola pedagogica der SUPSI in Locarno in Zusammenarbeit mit RSI KIDS kuratiert wurde.

Auch der klassische Disney-Kurzfilm 'Donald Duck in der Welt der Mathematik' aus dem Jahr 1959 sollte zu diesem Thema erwähnt werden. Unter den verschiedenen Inhalten beziehen sich einige auf die Verbindungen zwischen der goldenen Zahl, der Kunst und der Natur. Um die im Film behandelten Themen zu vertiefen, können Sie von der Website 'Matematicando' die Unterrichtsblätter 'Donald Duck's Mathematics' für 6-10-Jährige und 'Donald Duck's Mathematics' für 11-14-Jährige herunterladen.

Die Sammlung 'Mathematik und Natur' schließlich, die von Grundschullehrern aus dem Tessin zusammengestellt wurde, präsentiert zahlreiche didaktische Ideen, die interdisziplinäre Verbindungen zwischen Mathematik und Natur herstellen, und wird in Kürze online auf der Plattform 'Matematicando' verfügbar sein.

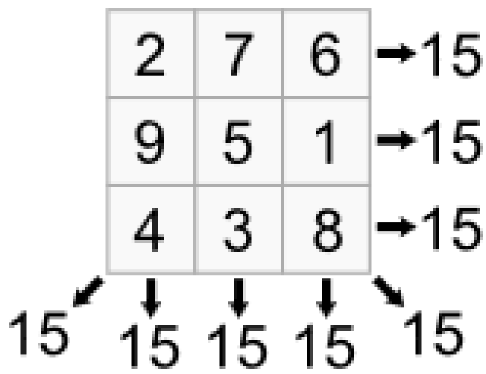
Die folgenden Texte, die für die letzten Jahre der Grund- und Mittelschule geeignet sind, können zu Unterrichtszwecken verwendet werden, um das Thema der Fibonacci-Folge und der Goldenen Zahl im Klassenzimmer zu behandeln:
- Cerasoli, A. (2010). *Ich zähle*. Feltrinelli Kids.
- Cerasoli, A. (2011). *Die großartigen Zehn*. Editorial Wissenschaft.
- Enzensberger, H. (1997). *Der Magier der Zahlen*. Einaudi Ragazzi.
- Feniello, A. (2014). *Das Kind, das die Null erfand*. Laterza Verlag.

Ein interessanter Comic, der auch für ältere Kinder geeignet ist, ist der folgende:
Flandoli, C. (2020). *Das Buch von Leonardo*. Comics&Wissenschaft.

Für eine vertiefte Studie, die sich an Erwachsene richtet, werden die folgenden Referenzen empfohlen:
- AA.VV. (2012). *Der Goldene Schnitt*. RBA.
- D'Amore, B. (2007). *Mathematik überall*. Pythagoras.
- D'Amore, B. (2015). *Kunst und Mathematik*. Daedalus Editions.
- D'Amore B., & Sbaragli S. (2017). *Die Mathematik und ihre Geschichte: von den Ursprüngen bis zum Mittelalter.* Daedalus Editions.
- Livio, M. (2005). *Der goldene Schnitt*. Rizzoli.
- Maor, E. & Jost, E. (2017). *Die Kunst der Geometrie*. Code Editions.

MAGIC SQUARE

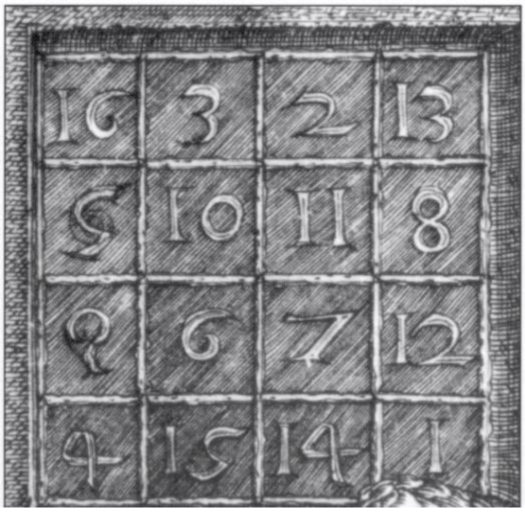
Ein magisches Quadrat ist eine quadratische Tabelle mit positiven ganzen Zahlen (1,2,3,4,5,6, usw.), die so konstruiert ist, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in beiden Diagonalen immer dieselbe Zahl ergibt, die *magische Konstante.* Die Anzahl der Spalten oder Zeilen wird die *Ordnung des* Quadrats genannt.



Warum? Der Mensch war schon immer von mathematischen Spielen und den damit verbundenen Rätseln fasziniert. Das magische Quadrat ist nicht nur ein Rätsel, sondern wurde auch von verschiedenen Zivilisationen - vor allem von den Arabern und Griechen - in bestimmten Anwendungen der Mathematik verwendet, wie z.B. in der Kombinatorik, insbesondere um die Gesamtzahl der möglichen Kombinationen in Abhängigkeit von der Reihenfolge zu ermitteln.

Wissenswertes: Eine alte chinesische Legende aus der Zeit um 2000 v. Chr. erzählt von einem Fischer, der am Ufer des Lo-Flusses eine Schildkröte mit seltsamen geometrischen Markierungen auf ihrem Panzer fand. Die Mathematiker des Kaisers entdeckten, dass es sich um ein Zahlenquadrat mit der konstanten Summe 15 in jeder Zeile, Spalte und Diagonale handelte. Das Shu, wie es genannt wurde, wurde zu einem der heiligen Symbole Chinas.

Eines der berühmtesten magischen Quadrate stammt von Albrecht Dürer (Maler und Landvermesser, 1471-1528) und erscheint in seinem Stich mit dem Titel *Melancholia I.* Es war wahrscheinlich das erste, das in der europäischen Kunst erschien und seine magische Konstante ist 34. Die Konstante ist auch gültig, wenn man die vier Ecksteine, die vier Mittelsteine, die vier Quadrantensteine und verschiedene andere Kombinationen einzeln addiert. Außerdem erscheinen die Zahlen 1514 (Datum des Werks) und 34 (Dürers Alter, als er das Werk schuf).



Pädagogische Links:***Kombinatorische Kalkulation***.

Das magische Quadrat ist ein besonderes Beispiel für ein *lateinisches Quadrat*, "ein quadratisches Schachbrett mit der Seite *n* und einem Symbol auf jedem Feld, so dass jedes Symbol nur einmal in jeder Zeile und Spalte erscheint". Ein weiteres Beispiel für ein magisches Quadrat ist das berühmte Sudoku.

MAGISCHES QUADRAT DER ORDNUNG $3 \ \rightarrow \ n = 9$

Ein Verfahren zum Zusammenstellen des magischen Quadrats (mit Zahlen von 1 bis 9) ist wie folgt:

1. Ordnen Sie die Zahlen im Raster in aufsteigender Reihenfolge an, beginnend mit dem linken oberen Feld.
2. Verschieben Sie die Zahlen um ein Feld, indem Sie sie im Uhrzeigersinn um die 5 im mittleren Feld drehen.
3. Tauschen Sie die Zahlen an den Enden der Diagonalen, d.h. 4 mit 6 und 2 mit 8.

Die Summe aller Zahlen im Quadrat ist:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

Allgemeiner ausgedrückt, ist die Summe von n aufeinanderfolgenden Zahlen gegeben durch $[(n+1)\times n]/2$. In diesem Fall erhalten wir also unter Anwendung der obigen Formel genau das $45=(10\times 9)/2$. Nimmt man nämlich die beiden äußersten Zahlen des äußeren Rahmens und nach und nach die innersten, erhält man immer den gleichen Wert, nämlich 10, indem man die vier Zahlenpaare 1+9, 2+8, 3+7 und 4+6, zu denen wir 5 hinzufügen, die zentrale und einzige Zahl, die nicht gepaart ist. Wenn die Summe der Zahlen bekannt ist und wir sie in drei Reihen (oder Spalten) so anordnen wollen, dass die Summe in jeder Reihe gleich ist, lässt sich unmittelbar ableiten, dass die konstante Summe (die so genannte magische Konstante) 45/3 = 15 sein muss.

Im Allgemeinen ist die konstante Summe für ein Quadrat der Ordnung n gleich n×(n^2+1)/2, eine Formel, die man ableiten kann, wenn man weiß, dass in einem Quadrat der Ordnung n die Zahlen von 1adn^2 stehen müssen, die sich dann zu n^2 (n^2+1)/2 addieren, und diese Summe dann durch die Ordnung des Quadrats (d. h. durch n) dividiert.

Es gibt auch eine Regel, die besagt, dass man die konstante Summe in einem magischen Quadrat ungerader Ordnung erhält, indem man die Zahl in der Mitte mit der Größe des Quadrats multipliziert. In unserem Fall hat das Quadrat die Größe 3, so dass wir, da wir die Summe (15) kennen, ableiten können, dass die Zahl in der Mitte 5 sein muss (15/3 = 5).
Wenn man die Zahl kennt, die in die Mitte des Quadrats gelegt werden muss, ist alles viel einfacher.
Die Frage, wie viele magische Quadrate der Ordnung 3 oder höher es gibt, ist ein Problem der Kombinatorik. Die Antwort ist jedoch nicht einfach und wurde erstmals von Bernard Frénicle de Bessy (1605-1665), einem französischen Mathematiker und Freund von Descartes, im Jahr 1663 berechnet:

- Die Anzahl der magischen Quadrate der Ordnung 3 ist 8, mit konstanter Summe 15, auf Zeilen, Spalten und Diagonalen.
- Die Anzahl der magischen Quadrate der Ordnung 4 ist 880, mit konstanter Summe 34, auf Zeilen, Spalten und Diagonalen.
- Erst dank des Computers konnte das Ergebnis 1973 auf die höheren Ordnungen ausgedehnt werden: Es gibt 275.305.224 magische Quadrate der Ordnung 5.
- Die genaue Anzahl der magischen Quadrate der Ordnung 6 ist nicht bekannt, obwohl sich viele Mathematiker bemüht haben, sie zu bestimmen. Einigen Untersuchungen zufolge liegt ihre Anzahl in der Größenordnung von 1.7754×10^9.

- Das allgemeinere Problem, die Regel zur Bestimmung der Anzahl der magischen Quadrate der Ordnung n zu finden, bleibt jedoch ungelöst. Dies bestätigt, dass es nicht einfach ist, eine mathematische Regel für alle quantitativen Probleme zu finden!

Andere externe Ressourcen:
(Auf Englisch)https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square
Ausführliche Wikipedia-Seite zum Thema magische Quadrate.

TURM VON HANOI

Was ist das? Es ist ein Puzzlespiel, das mit drei Einsätzen und einer variablen Anzahl von Plättchen gespielt wird. Die Regeln sind einfach:

- müssen Sie den ganzen Turm von einem Pfahl zum anderen bewegen, eine Scheibe nach der anderen;
- eine große Scheibe kann eine kleinere nicht abdecken.

In der Ausstellungsversion sind die Einsätze in einem Dreieck statt in einer Reihe (klassische Version) angeordnet und Sie können mit bis zu 8 Scheiben spielen.

Und warum? Dieses Rätsel ist sofort verständlich, kann mit wenigen Scheiben schnell gelöst werden (es wird empfohlen, mit 3 Scheiben zu beginnen), wird aber viel komplizierter, wenn die Anzahl der Scheiben steigt: die Anzahl der Züge, die zur Lösung benötigt werden, nimmt sehr schnell zu. Die minimale Anzahl von Zügen, Fehler ausgeschlossen, ist perfekt vorhersehbar: wenn die Anzahl der Scheiben ist, mit denen Sie spielen, benötigen Sie mindestens Züge, um es zu lösen.

Zum Beispiel:

- Bei 1 Scheibe sind 2^1-1=2-1=1 Züge erforderlich.
- Bei 2 Scheiben sind 2^2-1=4-1=3 Züge erforderlich.
- Bei 3 Scheiben sind 2^3-1=8-1=7 Züge erforderlich.

Und so weiter.

Anders ausgedrückt: Jedes Mal, wenn Sie ein Stockwerk hinzufügen, benötigen Sie doppelt so viele Züge plus einen. Diese zweite Beziehung wird im Laufe des Spiels deutlicher als die erste: Jedes Mal, wenn Sie ein Plättchen (unter den anderen) hinzufügen, müssen Sie zunächst dieselben Aktionen wie in der vorherigen Runde wiederholen, um es freizulegen, dann das hinzugefügte Plättchen verschieben und anschließend die Züge in umgekehrter Reihenfolge wiederholen, um es zu verdecken.

Wissenswertes: Dieses Spiel hat einen antiken Beigeschmack, aber es wurde 1883 von dem Mathematiker Edouard Lucas erfunden, ebenso wie die Geschichte, die der Spielzeugversion beilag: "*Zu Beginn der Zeit brachte Brahma drei Diamantsäulen und 64 goldene Scheiben in den großen Tempel von Benares, die er in absteigender Reihenfolge auf eine dieser Säulen legte. Es ist der heilige Turm von Brahma, bei dem die Tempelpriester Tag und Nacht damit beschäftigt sind, den Turm der Scheiben von der ersten zur dritten Säule zu bringen. Dabei dürfen sie nicht gegen die von Brahma auferlegten Regeln verstoßen, die besagen, dass sie immer nur eine Scheibe auf einmal verschieben dürfen und dass niemals eine Scheibe auf eine kleinere gelegt werden darf. Wenn die Priester ihr Werk vollendet haben und alle Scheiben auf der dritten Säule neu angeordnet sind, wird dies das Ende der Welt sein.*"

Dies würde - mathematisch gesehen - in 2^64-1= 18.446.744.073.709.551.615 Zügen geschehen. Wäre das einer pro Sekunde (ohne Fehler!), wären das mehr als 5 Milliarden Jahrhunderte.

Pädagogische Links: ***Exponential***.

In der Lösung des Spiels sind die bekannten Potenzen von 2 versteckt, die unter anderem an die binäre Notation von Zahlen erinnern (es gibt tatsächlich eine Interpretation des Spiels in diesem Schlüssel, siehe Link unten).

Pädagogische Links: ***Mathematische Sukzessionen***.

Um zu beweisen (durch *Induktion)*, dass die minimale Anzahl von Zügen zur Lösung des Spiels mit Ebenen ist ist $2^n - 1$, wird ein Ergebnis aus der Theorie der Sukzessionen verwendet: $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1}$.

Learning Links: ***Programmieren.***

Die dreieckige Anordnung des Hanoi-Turms verdeutlicht auch den *Algorithmus der* Züge, die als Lösung gefunden werden können (kurz gesagt: gerade Scheiben bewegen sich immer in eine Richtung, ungerade Scheiben in die entgegengesetzte Richtung). Nach diesem Verfahren kann ein Computer das Problem lösen, ohne die Spielregeln zu kennen, während ein Mensch den Turm korrekt bewegen könnte, während er pfeifend an die Einkaufsliste denkt.

Andere externe Ressourcen:
(Auf Englisch) https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi
Ausführliche Wikipedia-Seite über das Spiel.

HERVORRAGENDE STRATEGIEN - SPRINGENDE FRÖSCHE

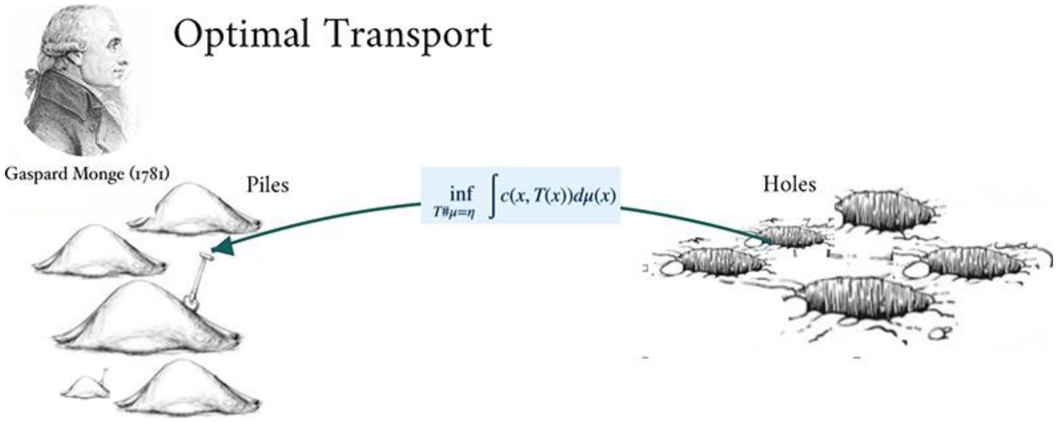
Das Material für diesen Abschnitt über optimale Strategien ist eine Überarbeitung des Lehrmaterials meines Kollegen Prof. Sumeetpal Singh (School of Mathematics and Applied Statistics, University of Wollongong, Australien), der von der TIBRA Foundation finanziell unterstützt wurde.

Dieser Abschnitt hilft Ihnen, wie ein Mathematiker oder Statistiker oder, noch allgemeiner, wie ein Datenwissenschaftler zu denken, d.h. einem Lernprozess zu folgen, der die folgenden Schritte umfasst: Einarbeiten, Visualisieren, Verallgemeinern, Überprüfen. Der Abschnitt ist nach diesen Punkten gegliedert:

1 Einleitung
2 Die Herausforderung
3 Entpacken Sie das Problem
4 Aufgabe1
5 Aufgabe2
6 Aufgabe3
7 Aufgabe4
8 Zusammenfassung

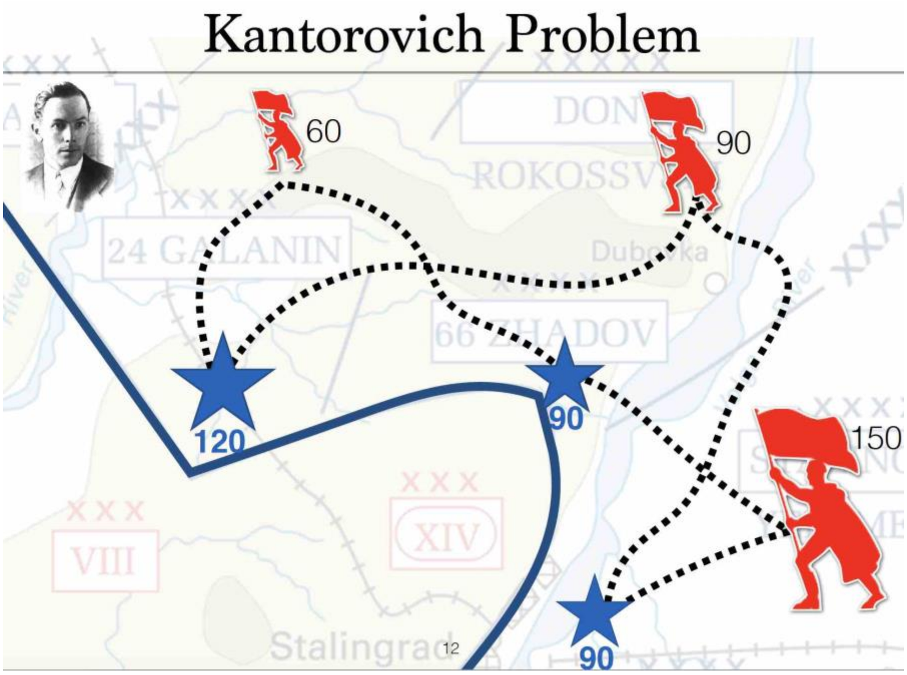
Beginnen wir mit einer Frage: Was machen Mathematiker bei ihrer täglichen Arbeit?
Mathematiker lösen echte Probleme! Mathematiker finden die besten Strategien.
Lassen Sie uns mit einem uralten Problem beginnen, das auch heute noch sehr aktuell ist.

Problem: Finden Sie die Strategie, um die Erde mit minimalem Aufwand von den Pfählen zu bewegen und die Löcher zu füllen. Dies ist ein sogenanntes 'optimales Transportproblem'. Prof. Alessio Figalli wurde mit der Fields-Medaille2018 - dem Äquivalent des Nobelpreises für Mathematik - ausgezeichnet, vor allem mit Bezug auf die von ihm entwickelte Theorie zu diesem Thema.

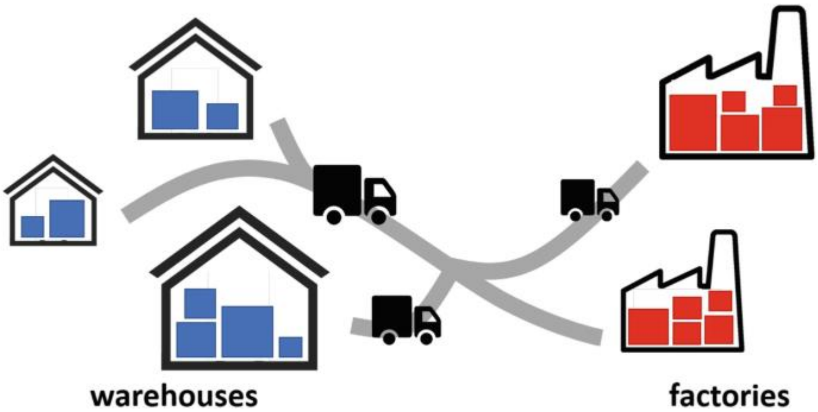


Fällt Ihnen eine aktuelle Version dieses Problems ein?

Hier sind einige weitere Beispiele.
Verlegung der Truppen von den Kasernen zu den Gefechtsstationen.



Transport von Material von Lagerhäusern zu Fabriken.



Computerrekonstruktion der Entwicklung der Erde bis zum heutigen Tag.

Credits für die 3 Bilder oben: M Cuturi& J. Solomon; https://arxiv.org/pdf/2008.02995.pdf ESA und die Planck Collaboration,T.H. Jarrett & RoyaMohayaee.

Ihre Aufgabe: Lösen Sie eine "Studentenversion" des Optimal Transport Problems.

Ziel: Tauschen Sie die Positionen der Frösche in möglichst wenigen Zügen! Die blauen Frösche von rechts müssen nach links wandern und die roten Frösche, die ursprünglich auf der linken Seite waren, müssen nach rechts bewegt werden.

Startpunkt: Abbildung 1

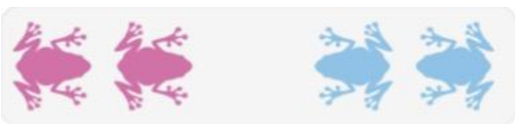


Abb. 1

Die Regeln: Frösche können wie in Abbildung 2 auf leere Felder unmittelbar rechts oder links von ihnen rutschen:

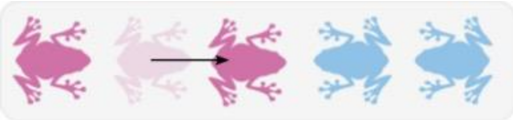


Abb. 2

Ein Frosch kann wie in Abbildung 3 über einen benachbarten Frosch springen:


Abb. 3

Für Einzelheiten siehe:
https://nrich.maths.org/content/00/12/game1/frogs/index.html#/student

Wie gehen wir vor? Um ein komplexes Problem zu lösen, besteht eine mögliche Strategie darin, das Problem in einfachere Probleme aufzuteilen.

Wir haben vier Aufgaben zu erfüllen:
Aufgabe 1: Machen Sie sich mit einem Online-Spiel vertraut.
Aufgabe 2: Zeichnen Sie Ihre Lösung auf und teilen Sie sie mit.
Aufgabe 3: Suchen Sie nach einem Modell für eine Lösungsstrategie.
Aufgabe 4: Überprüfen Sie die Strategie und die Formel.

Aufgabe 1: Machen Sie sich mit dem Spiel vertraut. Dies können wir mit der Anwendung tun, die von der University of Cambridge entwickelt wurde und unter diesem Link online verfügbar ist: https://nrich.maths.org/1246

Wir beginnen das Experiment mit nur 2 roten Fröschen und 2 blauen Fröschen wie in Abbildung 4.

Find a way to swap the 2 red and 2 blue frogs.

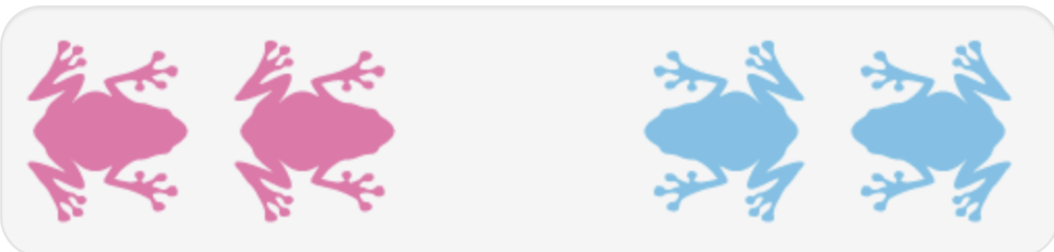


Abb. 4

Als Alternative können wir Frösche aus Papier bauen, indem wir einfache Origami-Schritte befolgen: https://www.youtube.com/watch?v=FuygepwQyN8

Notieren Sie die Gesamtzahl der Bewegungen für jeden Versuch.
Das Ziel ist es, die Anzahl der Züge zu minimieren. Wir entdecken bald, dass die beste Lösung keine Rückwärtsschritte beinhalten darf.

Aufgabe 2: Aufzeichnung / Mitteilung der Lösung (≈5 min).
Besprechen Sie, wie Sie Ihre Lösung aufzeichnen, damit sie reproduziert werden kann.
Versuchen Sie, das Spiel komplexer zu gestalten, indem Sie wie in Abbildung 5 von 4 Fröschen (2 blaue und 2 rote) auf 6 Frösche (3 blaue und 3 rote) wechseln.

Find a way to swap the 3 red and 3 blue frogs.

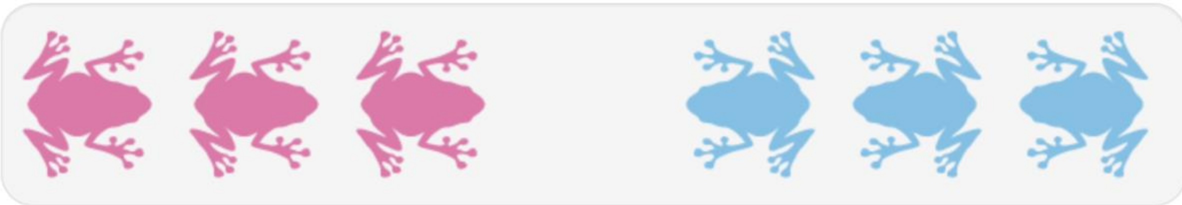


Abb. 5

Tipp: Wie können Sie Züge in einem Brettspiel aufzeichnen?
Wir lernen, wie man eine Tabelle verwendet, um Züge aufzuzeichnen (≈10 min).
Ein gutes Bild kann helfen, eine Strategie zur Lösung des Problems zu finden
Problem für eine beliebige Anzahl von Fröschen.
Verwenden Sie die Tabelle in Abbildung 6, um eine Lösung mit minimalen Zügen aufzuzeichnen.

R3	R2	R1		B1	B2	B3
		1				
				1		

Abb. 6

Aufgabe 3: Finden Sie die optimale Strategie und Formel (≈12 min)
Verwenden Sie die ausgefüllte Tabelle:
Finden Sie die Formel für die Anzahl der Züge. Finden Sie die Strategie für das Bewegen der Frösche.

Listen Sie die Züge auf, indem Sie die Farbe des sich bewegenden Frosches angeben:
R, B, R, RB, B, B
R, R, B, B, R

Zählen Sie die Züge, die Sie gemacht haben:
1+ 2 + 3
+ 3
+ 3+2+1
Erkennen Sie ein Muster?
Können Sie die Anzahl der Züge für 4 Frösche oder 5 Frösche oder, allgemeiner, für n Frösche ermitteln?

Listen Sie die Züge auf eine andere Art und Weise auf: Auf diese Weise geben wir nicht nur die Farbe des Frosches an, der sich bewegt, sondern auch, ob es sich um den Frosch handelt, der mit der Nummer 1, 2 oder 3 verbunden ist (die Nummern beziehen sich auf die Position, die der Frosch zu Beginn des Spiels einnimmt, so als ob die Frösche eine Karte mit ihrer Nummer angehängt hätten, die je nach Farbe in rot oder blau geschrieben ist). Auf diese Weise können die gleichen Züge wie zuvor auf eine alternative und informativere Weise aufgelistet werden:

1,
1, 2,
1, 2, 3
1, 2, 3
1, 2, 3,
2, 3,
3

Aufgabe 4: Überprüfen Sie die Strategie und die Formel.
Nun, da Sie eine Formel für n Frösche gefunden haben, überprüfen Sie diese:
Sie haben den Fall der 2 Frösche in 8 Zügen gelöst. Stimmt die Formel?
Spielen Sie das Spiel für mehrere Frösche und setzen Sie Ihre Strategie um. Überprüfen Sie, ob Sie damit die geringste Anzahl von Zügen erreichen, d.h. ob die minimale Anzahl von Zügen von Ihrer Formel richtig vorhergesagt wird.

Gut gemacht, wenn Sie so weit gekommen sind, haben Sie die typischen Schritte der wissenschaftlichen Forschung befolgt:
1 - Ich beobachte eine Situation und versuche, das Problem zu verstehen, das ich lösen muss
2 - Ich beschreibe sie zunächst visuell und dann mathematisch, zum Beispiel mit einer Tabelle und suche nach Regelmäßigkeiten, Mustern, die mir helfen, die Situation besser zu verstehen

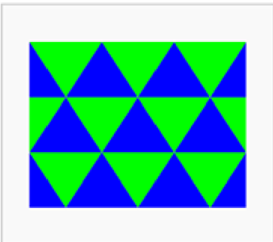
3 - Ich versuche, die Situation und eine mögliche Lösung mithilfe eines mathematischen Formalismus zu erklären
4 - Ich versuche zu verstehen, ob mein Formalismus, in diesem Fall die Formel, im Allgemeinen verifiziert ist

Indem wir diese einfachen Schritte, einen nach dem anderen, befolgen, hat uns die Wissenschaft bis zum Mond gebracht... und darüber hinaus!

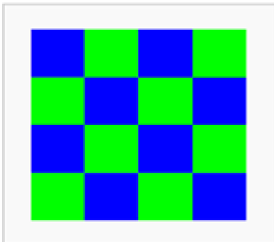
PARKETTIERUNG

Was ist das? Ein Mosaik ist die periodische Wiederholung der gleichen Figur, die eine Ebene ohne Überlappungen oder Löcher bedeckt. Die Figuren, die zur Abdeckung der Fläche verwendet werden, sind oft Polygone, regelmäßig oder nicht, können aber auch gekrümmte Seiten haben oder ohne Scheitelpunkte sein.

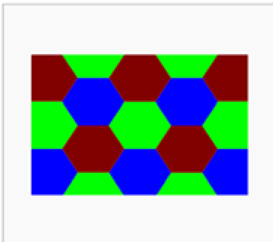
Und warum? Einige Figuren, z. B. Dreieck, Quadrat, Rechteck, Sechseck usw., ermöglichen es uns, ein vollständiges Mosaik zu erstellen, andere nicht. Wie kommt das? Und wie ist es möglich, das Ergebnis vorherzusagen? Die Mathematik hilft uns dabei: Im Allgemeinen genügt es, die Amplituden der Winkel zu addieren, die sich an einem der Schnittpunkte der Mosaike bilden, um dies herauszufinden. Wenn das Ergebnis der Addition der Amplituden dieser Winkel von 360° abweicht



Tasselli triangolari



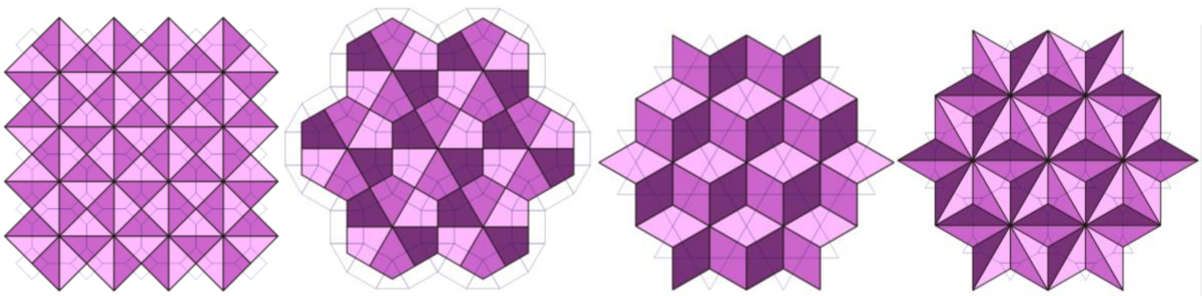
Tasselli quadrati



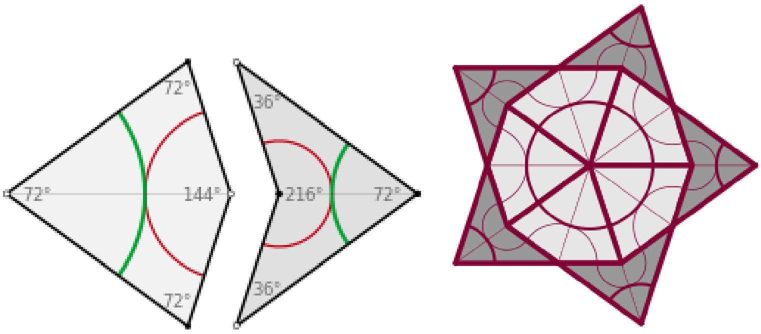
Tasselli esagonali

ist es nicht möglich, ein vollständiges Mosaik zu erstellen, ansonsten ja. Wenn wir dann für die gesamte Tesselierung die Verwendung eines einzigen regelmäßigen Polygons vorschreiben, d.h.

mit gleichen Seiten und Winkeln, haben wir nur 3 mögliche Konfigurationen. Tatsächlich muss in diesem Fall das Maß der Winkel des Dübels ein ganzzahliger Teiler von sein und daher kommen nur das gleichseitige Dreieck (60°), das Quadrat (90°) und das regelmäßige Sechseck (120°):



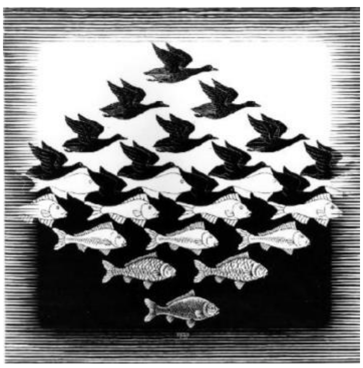
Wissenswertes: Die oben abgebildeten Mosaike werden als *regelmäßige Mosaike bezeichnet*, weil sie jeweils nur eine geometrische Form verwenden. 1974 entdeckten Roger Penrose und Robert Ammann verschiedene *irreguläre Mosaike, d.h.* Mosaike, die mehrere geometrische Figuren in einem Mosaik verwenden, darunter den Drachen und den Dart.



In der Natur gibt es *unendliche* Mosaike, d.h. deren geometrische Grundform sich ständig wiederholt. Ein Beispiel dafür ist das Sechseck im Bienenstock:

Der niederländische Künstler Maurits Cornelis Escher ist berühmt für seine Mosaike, die oft Tiere wie Fische, Vögel und Pferde darstellen.

M.C. Escher, *Himmel und Wasser I*, 1938



Pädagogische Links: ***Geometrie.***

Die Ebene oder den Raum mit sich wiederholenden regelmäßigen Figuren zu bedecken, ist ein klassisches Problem der Geometrie, noch bevor es zu einem künstlerischen Problem wurde. Es beinhaltet eine ganze Reihe von geometrischen Konzepten wie Spiegelungen, Rotationen, Translationen und nicht zuletzt den *Goldenen Schnitt*.
Ganz allgemein werden mit Objekten wie dem Tangram/Stomachion, dem magischen Quadrat, dem Turm von Hanoi und der mosaikartigen Ebene Systeme mit sehr präzisen Regeln ins Spiel gebracht, die es ermöglichen, eine ganze Reihe von Ergebnissen, die zu Beginn oft nicht sichtbar sind, abzuleiten und somit mit Sicherheit vorherzusagen. Auch wenn sie dadurch nicht trivial oder einfach zu lösen sind (der Fall des Stomachion ist emblematisch). Ganz im Gegenteil zu Spielen, die auf Zufall beruhen, wie zum Beispiel Glücksspiele.

Bildungslinks: ***Philosophie.***

Was Aristoteles vor mehr als 2000 Jahren begonnen hat, setzt nun ein Team von 30 Studenten des Massachusetts Institute of Technology fort. Sie beginnen mit einem neuen mathematischen Ergebnis, das der uralten Suche nach geometrischen Formen, die den dreidimensionalen Raum tesselieren, d.h. perfekt ausfüllen können, neues Leben eingehaucht hat. "Es ist aufregend zu wissen, dass einige der größten Denker aller Zeiten an diesem Thema gearbeitet haben.

Andere externe Ressourcen:
(Auf Englisch) https://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation
Ausführliche Wikipedia-Seite über Tessellationen.
(Auf Englisch) https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling
Wikipedia-Seite zur Penrose-Tesselierung.

SPIELE SÄEN

Pflanzenspiele sind eine Familie von Brettspielen, die in weiten Teilen der Welt verbreitet sind (insbesondere in Afrika, dem Nahen Osten, Südostasien und Mittelamerika). Die Ähnlichkeit vieler Aspekte des Spiels mit landwirtschaftlichen Tätigkeiten und die Einfachheit des Spielbretts und der Spielsteine, die große Anzahl von Varianten und ihre Verbreitung in der ganzen Welt deuten auf einen sehr alten Ursprung hin; nach Ansicht einiger vielleicht sogar auf die Anfänge der Zivilisation.

Dies sind antike Spiele, die die Vorläufer von Backgamon waren. Das Spiel ist ein universelles Werkzeug, mit dem man sich selbst und andere besser kennenlernen kann. Das Spiel ist ein Zeitvertreib, eine Unterhaltung und gleichzeitig ein Mittel, mit dem man, fast ohne es zu merken, Fähigkeiten erwirbt, die für die Entwicklung eines jeden Menschen nützlich sind.

Mancala ist ein altes afrikanisches Spiel, das zur Familie der Aussaatspiele gehört.
In einer der beliebtesten Versionen ist das Mancala ein Spielbrett mit zwei parallelen Reihen von sechs Löchern, eine Reihe für jeden Spieler. In jedes Loch werden vier Plättchen, die *Samen*, gelegt. An den Seiten befinden sich zwei Gefäße, die mancalas, in denen die gewonnenen Samen aufbewahrt werden. Das können Bohnen, Samen, Beeren oder Körner, Steine oder, wie wir es gemacht haben, Muscheln sein.
Das Spielbrett stellt Himmel und Erde dar und in einigen Kulturen simuliert die Bewegung der Spielfiguren die Handlungen von Saat und Ernte.

Regeln:
Reihum nimmt jeder Spieler alle Plättchen, die sich in einem der sechs Löcher in seiner Reihe befinden, und "sät" sie gegen den Uhrzeigersinn in die Löcher, die nach dem Loch liegen, aus dem er sie genommen hat, eines pro Loch, natürlich einschließlich seines eigenen Mancala.
Wenn ein Spieler während des Spiels mit seinem letzten Spielstein in einem leeren Loch oder in einem Loch mit mehr als zwei Murmeln ankommt, nimmt er keinen. Wenn das Loch jedoch 1 oder 2 Spielsteine enthält, außer dem, den er hingelegt hat, darf er alle Spielsteine im Loch nehmen, einschließlich seines eigenen.
Das Spiel endet, wenn einer der beiden Spieler nicht mehr genügend Bauern zum Ziehen hat. In diesem Fall schlägt der Gegner die restlichen Steine und der Spieler, der die meisten Steine geschlagen hat, gewinnt. Um jedoch zu verhindern, dass eine solche Situation zu früh im Spiel eintritt, ist es verboten, die Reihen des Gegners vollständig zu leeren und ihn damit an einem Gegenzug zu hindern, es sei denn, alle möglichen Züge blockieren den Gegner in jedem Fall. Ein Spieler, der diese letzte Regel nicht beachtet, wird bestraft: Sein Gegner schlägt alle Bauern, die noch im Spiel sind.

NUMB3D BY NUMB3RS!

DICE

QUINCONCE ODER GALTON-MASCHINE

Die Galton-Maschine ist nach Sir Francis Galton benannt, einem englischen Mathematiker und Statistiker, der sie im späten 19. Jahrhundert entwickelte, um bestimmte statistische Konzepte zu erklären. Sir Francis Galton war ein Cousin von Charles Darwin und wurde von Darwins Arbeit über Evolution und natürliche Selektion stark beeinflusst.

Wie spielt man?

SCHRITT 1: Lassen Sie zunächst eine Kugel fallen und versuchen Sie zu erraten, in welchem unteren Feld sie landen wird. Es ist ziemlich schwierig, das vorherzusagen!
Wenn ein Kind das richtige Kästchen errät, erhält es 3 Punkte.
Verfehlt er/sie um ein Feld (links oder rechts), erhält das Kind 2 Punkte.
Wenn er um 2 Felder danebenschießt, erhält er nur 1 Punkt.
Ansonsten null Punkte.
Wer die meisten Punkte erzielt, gewinnt.

PHASE 2:

Lassen Sie nun eine Handvoll Bälle fallen und versuchen Sie zu erraten, wie viele davon in den am weitesten entfernten Kästchen (ganz rechts oder ganz links) landen werden.
Wenn das Kind sagt, dass 10 Kugeln in das Feld ganz rechts fallen werden und keine Kugeln in diesem Feld landen, verliert es 10 Punkte.
Wenn das Kind 10 sagt und 1 Ball ganz rechts landet, verliert es 9 Punkte (10-1). Und so weiter.

PHASE 3:

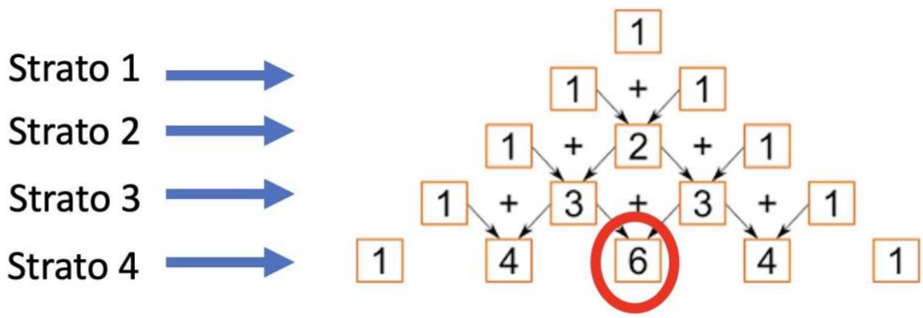
Lassen Sie jetzt alle Bälle fallen.
Was wird Ihrer Meinung nach passieren?
Können wir vorhersagen, wo sie landen werden?

Was haben wir gelernt?

Oben in Galtons Maschine fallen die Kugeln ungeordnet und chaotisch, aber unten werden sie wie von Geisterhand in verschiedene Kästchen gelenkt und bilden dabei IMMER die Umrisse einer "Glocke", die als **Gaußsche oder normale Verteilung** bekannt ist.

Wie lässt sich diese Regelmäßigkeit rechtfertigen?
An jedem Pflock kann die einzelne Kugel 'entscheiden', ob sie nach links oder nach rechts abprallen soll.
Wenn die Kugel auf das letzte Feld auf der rechten Seite "wollte", müsste sie sich entscheiden, immer nach rechts zu hüpfen.
Mit anderen Worten, **es gibt nur einen Weg**, der den Ball zum letzten Feld auf der rechten Seite führt. Dasselbe gilt für das letzte Feld auf der linken Seite.
Stattdessen gibt es **viel mehr Wege**, die den Ball zu den mittleren Feldern führen.
Ein Sprung nach rechts, gefolgt von einem Sprung nach links und so weiter, bringt den Ball zum Beispiel in das mittlere Feld.
Aber auch: zwei Sprünge nach rechts und zwei nach links, und so weiter, bringen den Ball in das mittlere Feld.
Im Allgemeinen reicht es aus, wenn die Anzahl der Schritte/Kicks nach rechts gleich der Anzahl der Schritte/Kicks nach links ist, damit der Ball genau im mittleren Feld landet.

Wenn es nur 4 Schichten von Pflöcken gäbe, wäre die Anzahl der Wege, die genau zum mittleren Quadrat führen, 6, wie in der letzten Reihe des Tartaglia-Dreiecks unten gezeigt. Können Sie alle möglichen Wege finden, die zum zentralen Quadrat führen?



Im Tartaglia-Dreieck ist jede Zahl die Summe der vorangehenden Zahlen, wie auf dem Bild zu sehen.

Übung: Vervollständigen Sie das Dreieck mit anderen Ebenen.

Auch bei 4 Ebenen wäre die Anzahl der Pfade, die genau zum vorletzten Kästchen auf der linken Seite führen, 4, wie in der letzten Zeile des Dreiecks von Tartaglia unten gezeigt.

1

1 1

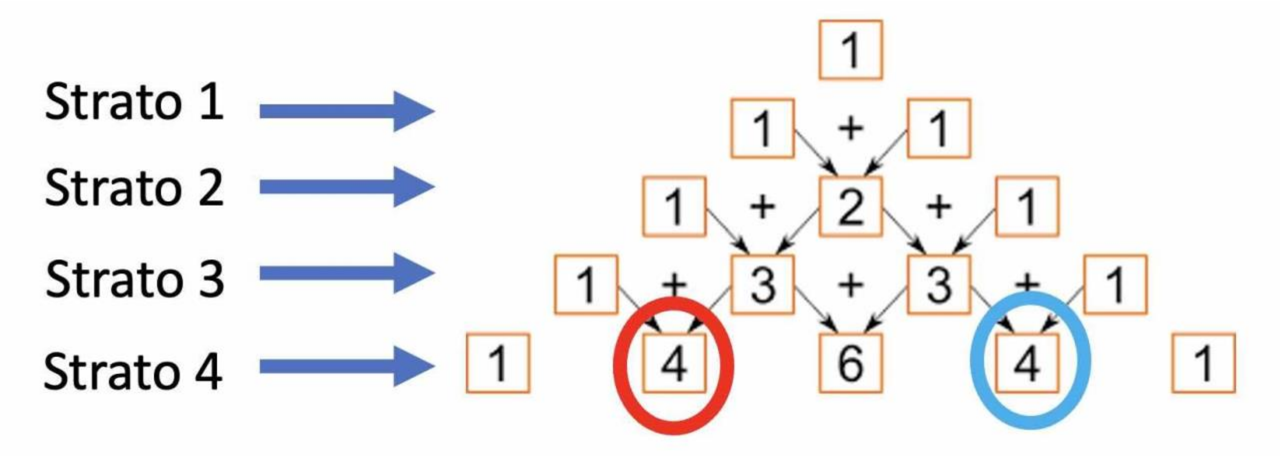
1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1



Können Sie alle diese Routen finden?
Und wie viele Wege führen zum vorletzten Feld auf der rechten Seite?
Es gibt interessante Symmetrien!

Wenn es anstelle von 4 6 Schichten von Pflöcken an der Spitze dieses Pfostens gäbe, wäre die Anzahl der Wege, die genau in die Mitte führen, 20, wie in der letzten Zeile des Dreiecks von Tartaglia unten gezeigt.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

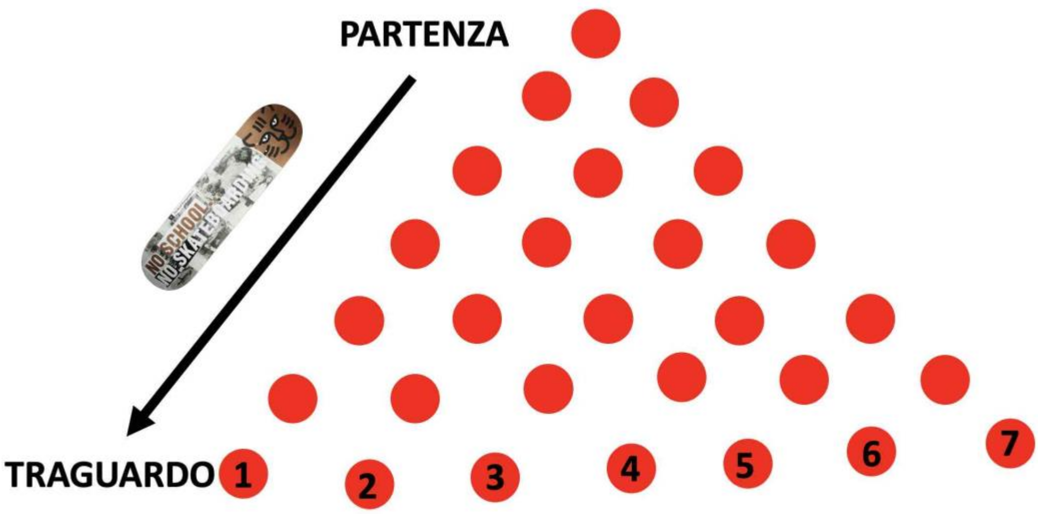
Das Dreieck von Tartaglia ist auch wichtig für die Berechnung der Koeffizienten bei der Entwicklung der n-ten Potenz des Binoms $(a+b)^n$.

Die Gaußsche Verteilung ist symmetrisch in Bezug auf den Mittelwert, der auch der Mode und dem Median entspricht, und diese Symmetrie ist "ähnlich" wie die des Tartaglia-Dreiecks.
Das zentrale Grenzwertsyndrom liegt der Regelmäßigkeit zugrunde, die wir in den Kästchen dieser Station beobachten können, wo die Kugeln in geordneter Weise kanalisiert werden, eine Ordnung, die im Gegensatz zu der Zufälligkeit steht, die im oberen Teil der Station zu beobachten ist. Dank dieser Regelmäßigkeit, die vom zentralen Grenzwertsatz diktiert wird, sind Statistiker in der Lage, Vorhersagen auf der Grundlage großer Stichproben zu treffen.

Was lernen wir aus diesem Spiel in Bezug auf das tägliche Leben?

- Jeder Ball kann als eine Person betrachtet werden
- Wenn Menschen binäre Entscheidungen treffen (mit nur 2 möglichen Optionen, wie wählen oder nicht wählen, zur Schule gehen oder nicht zur Schule gehen, reisen oder nicht reisen), verhalten sie sich wie ein Ball, der sich für links oder rechts entscheidet.
- Wenn die Entscheidungen der Menschen unabhängig voneinander sind, können wir das Ergebnis vieler Entscheidungen, die von vielen Menschen getroffen wurden, mithilfe der Gauß-Kurve untersuchen.
- Carl Friedrich Gauß war ein deutscher Mathematiker, Physiker und Astronom, der von 1777 bis 1855 lebte. Er gilt als einer der größten Mathematiker aller Zeiten.

Galton Skate-Board auf Papier
Drucken (oder zeichnen) Sie dieses Bild:



GALTON-SKATE-BOARD !

Wie spielen Sie mit dem Galton-Skate-Board?

- Jedes Kind hat einen Gegenstand, der sein Skateboard darstellt.
- Jedes Kind hat eine Münze, die sechsmal geworfen wird.
- Das Skateboard startet an der 'Start'- und endet an der 'Ziel'-Linie.
- Jedes Mal, wenn der Münzwurf HEAD ist, rutscht das Skateboard einen Schritt in Richtung des roten Kreises auf der rechten Seite.
- Jedes Mal, wenn der Münzwurf CROSS ist, rutscht das Skateboard einen Schritt in Richtung des roten Kreises auf der linken Seite.
- In welcher Endposition (1, 2,... oder 7) werden die meisten Skateboards landen?
- HINWEIS: Je mehr Kinder spielen, desto unsicherer wird das Ergebnis sein!
- Jedes Kind kann mehrmals spielen und dabei jedes Mal die Endposition festhalten.
- Sie können die Münzwürfe (mit Kopf und Zahl) durch schwarze und weiße Steine ersetzen.
- Sie haben einen Beutel mit einer gleichen Anzahl schwarzer und weißer Steine. Die Kinder wählen abwechselnd 6 Steine aus: Wenn der Stein weiß ist, schieben sie ihr Skateboard zum linken roten Kreis, wenn er schwarz ist, schieben sie ihr Skateboard zum rechten roten Kreis.
- Sobald ein Kind fertig ist, werden seine Steine zurück in den Beutel gelegt und das nächste Kind beginnt.
- Lassen Sie uns gemeinsam überlegen: Was passiert, wenn die Anzahl der weißen Steine größer ist als die Anzahl der schwarzen Steine?

Tragen Sie die endgültige Skateboard-Position jedes Kindes in jedem Spiel in ein Raster ähnlich dem untenstehenden ein.

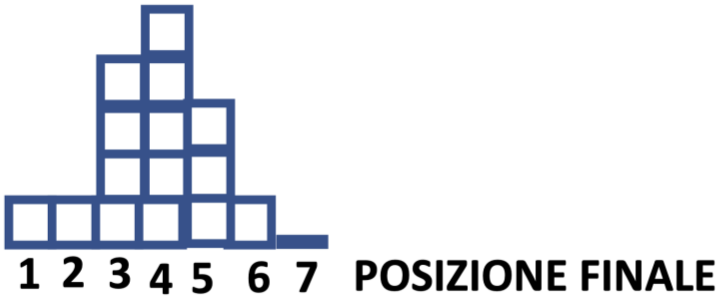
	SPIEL 1	SPIEL 2	SPIEL 3
BABY 1			
BABY 2			
BABY 3			
BABY 4			
BABY 5			

BEISPIEL für den Ausgang des Galton-Skate-Board-Spiels

	SPIEL 1	SPIEL 2	SPIEL 3

BABY 1	Endgültige Position 5	Endgültige Position 4	Endgültige Position 3
BABY 2	Endgültige Position 4	Endgültige Position 3	Endgültige Position 5
BABY 3	Endgültige Position 4	Endgültige Position 1	Endgültige Position 4
BABY 4	Endgültige Position 3	Endgültige Position 4	Endgültige Position 5
BABY 5	Endgültige Position 6	Endgültige Position 3	Endgültige Position 2

Posizione finale 1: raggiunta 1 volta
Posizione finale 2: raggiunta 1 volta
Posizione finale 3: raggiunta 4 volte
Posizione finale 4: raggiunta 5 volte
Posizione finale 5: raggiunta 3 volte
Posizione finale 6: raggiunta 1 volta
Posizione finale 7: raggiunta 0 volte



Das Bild, das Sie sehen, wird als Histogramm bezeichnet und ist eine grafische Darstellung der Daten. Sie besteht aus einer Reihe von gleich breiten Balken. Die Höhe jedes Balkens stellt die Häufigkeit oder Anzahl der Beobachtungen jedes Ergebnisses im Spiel dar.

ERLÄUTERUNG

- Die meisten Skateboards werden auf Position 4 landen.
- Nur sehr wenige werden auf den Positionen 1 und 7 landen.
- Und warum?
- Es gibt nur einen Weg, der zur Endposition 1 führt: C, C, C**, C**
- Es gibt nur einen Weg, der zur Endposition 7 führt: **T, T, T, T**
- Es gibt viele Wege, die zur zentralen Endposition 4 führen, zum Beispiel:
  C, T, C, T, C, T oder T, T, T, C, C, C oder C, C, C, C, T, T,T
- Im Allgemeinen führt jede Route mit **3 Cs** und **3 Ts** zur Endposition 4

REAL-LIFE-ANWENDUNGEN

Galtons Maschine veranschaulicht den zentralen Grenzwertsatz, ein Theorem, das ZENTRAL für Vorhersagen ist, die immer zuverlässiger werden, je größer die "Stichprobengröße" (im GRENZEN) wird.

BEISPIEL 1) Größe der Kinder

- Messen Sie die Größe von 20 Kindern und berechnen Sie die Durchschnittsgröße.
- Wir nennen diese Menge den **Bevölkerungsdurchschnitt.**
- Jedes Kind nimmt nun ein Blatt Papier und schreibt seinen Namen.
- Die Blätter werden in eine Box gelegt und 10 Namen werden zufällig ausgewählt (ohne hinzusehen). Die durchschnittliche Größe der ausgewählten Kinder (Stichprobe) wird berechnet. Wir nennen diesen Durchschnitt den **Stichprobendurchschnitt.**
- Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass der Mittelwert der Stichprobe sehr nahe am Mittelwert der Grundgesamtheit liegen sollte.
- Wenn weniger Kinder in der Stichprobe ausgewählt werden, z. B. 5, sollten die beiden Durchschnittswerte (Bevölkerung und Stichprobe) immer noch nahe beieinander liegen, aber wahrscheinlich weniger nahe.
- Wenn nur ein Kind ausgewählt wird, ist es schwierig, etwas über seine Größe zu sagen.
- Dies ist vergleichbar mit dem, was passiert, wenn wir eine einzelne Kugel in Galtons Maschine werfen: Es ist schwer vorherzusagen, wo sie landen wird.
- Wenn wir eine Handvoll Bälle haben (gleichbedeutend mit einer Stichprobe), ist es einfacher, Vorhersagen zu treffen.

BEISPIEL 2) Regionales Durchschnittsgehalt

- Gehälter der Menschen in einer Region: Es ist zu zeitaufwendig, jede Person in einer Region nach ihrem Gehalt zu fragen und dann das Durchschnittsgehalt für die Region zu berechnen.
- Es ist viel einfacher, eine zufällige (repräsentative) Stichprobe von Menschen in der Region zu nehmen und das Durchschnittsgehalt der Stichprobe zu berechnen.
- Das zentrale Grenzwertsatztheorem besagt, dass der Durchschnittslohn in der Region dem Durchschnittslohn in der Stichprobe sehr nahe kommt. Und er kommt dem wahren Wert immer näher, je größer die Anzahl der Personen in der Stichprobe ist, solange die Stichprobe repräsentativ ist.

TOPF LOT

Was ist das? Das Lottospiel besteht aus der Ziehung einer Anzahl unterschiedlich nummerierter Kugeln aus einer Urne, ohne dass diese erneut gezogen werden. Der Gewinner - wenn es einen gibt! - ist die Person, die einen Teil oder alle gezogenen nummerierten Kugeln vorhersagen konnte. In der Schweiz wurde das Lottospiel 1970 eingeführt und der erste Millionengewinn wurde 1979 erzielt. Zu Beginn wurden 40 Zahlen gespielt, dann 42, 1986 45 und seit 2013 wieder 42, von denen 6 gezogen werden. Die Wahrscheinlichkeit, 6 Zahlen aus 42 zu tippen, liegt bei 1 zu 5.245.786.

Warum eigentlich? Beim Lottospielen sind wir versucht, auf Zahlen zu setzen, die am längsten nicht mehr aufgetaucht sind, die so genannten "späten" Zahlen. Leider entscheidet aber nur der Zufall: Es gibt keine Tricks oder Methoden, denn jede Zahl hat die gleiche Chance, gezogen zu werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl auftaucht, beträgt 1/42, also etwas mehr als 2%. Eine Zahl kann Hunderte von Ziehungen verzögert werden, aber die Wahrscheinlichkeit, dass sie auftaucht, bleibt immer 1/42, sie nimmt nicht zu, geschweige denn ab. Diese Art von Spiel hat kein Gedächtnis; dennoch wird uns etwas anderes vorgegaukelt.

Aber ist Lotto ein **faires** Spiel? Ein *Spiel wird als fair* bezeichnet, wenn es einen Preis gibt, der von den Gewinnchancen abhängt. Beim Wurf einer Münze ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie Kopf oder Zahl zeigt, 1 zu 2. Das Spiel ist fair, wenn man mit einem Franc 2 gewinnen kann. Lotto ist kein faires Spiel. Der Bankier genießt einen Vorteil, der durch die hohe Anzahl der Einsätze und die Ungerechtigkeit der als Prämie gezahlten Quoten im Vergleich zur Gewinnwahrscheinlichkeit gewährleistet wird. Daher ist der Spieler, auch wenn er manchmal gewinnt - selbst bei großen Gewinnen -, auf lange Sicht immer ein Verlierer.

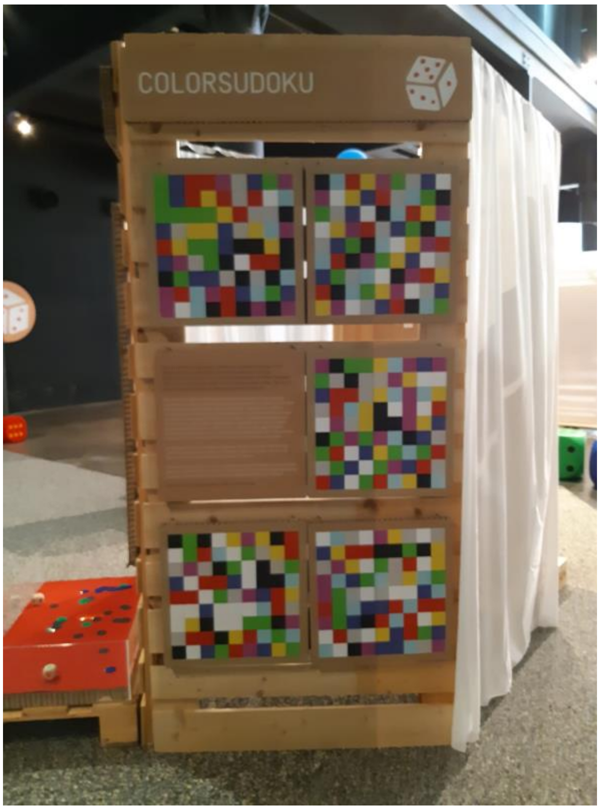
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, 3 aus 42 Zahlen zu erraten? Nehmen wir an, wir wählen: 2, 11, 29. Diese können auf 6 verschiedene Arten gezogen werden, z.B. (6=3! =3x2x1; n!=nx(n-1)x(n-2)x...x1): 2,11,29 - 2,29,11 -29,2,11 - 29,11,2 - 11,29,2 - 11,2,29. Wie viele Drillinge sind mit 42 Zahlen möglich? Sie müssen 42 Objekte 3 mal 3 kombinieren. Mathematisch gesehen entspricht dies der

Berechnung von 42!/(3!x(42-3)!), d.h. (42x41x40)/6=11,480. Die Wahrscheinlichkeit, ein Terno mit 42 Zahlen zu erraten, liegt also bei 1 zu 11.480. Niedrig? Mit den gleichen Berechnungen finden wir heraus, dass die Wahrscheinlichkeit, 6 Zahlen aus 42 zu tippen, 1 zu 5.245.786 beträgt. Es wurde berechnet, dass es wahrscheinlicher ist, dass der Asteroid 99942 Apophis im Jahr 2036 die Erde trifft - die Wahrscheinlichkeit liegt bei 1 zu 40.000). Aber es gibt so viele Spieler, dass manchmal tatsächlich jemand sie errät.

Tatsache: Jedes Jahr werden zwölftausend gemeinnützige Projekte in den Bereichen Kultur, Sport, Umwelt und Soziales mit dem Erlös von *Swisslos* unterstützt: Jeden Tag fließt eine Million Franken des *Swisslos-Reingewinns* in die kantonalen Fonds. Seit seiner Gründung hat *Swisslos* rund fünf Milliarden Franken in karitative und gemeinnützige Projekte investiert und ist damit der wichtigste Förderer von Kultur und Sport in der Schweiz.
Das Schweizer Lotto hat seit seinem Bestehen achthundert Millionäre hervorgebracht.

Andere externe Ressourcen:
http://old.sis-statistica.org/magazine/spip.php?article172
Was haben Statistiken mit Lotto zu tun?
http://www.festadellamatematica.it/doc2013/Antonelli-lottologia-CC.pdf
Betrachtung der Lottologie

FARBE SUDOKU



Alle farbigen Felder in dieser Station wurden durch zufällige Platzierung der neun Farben im 9x9-Gitter erzeugt, mit Ausnahme eines der Felder (das oben rechts), das deterministisch ist (eine Farbe pro Zeile, pro Spalte, pro Diagonale und in den 3x3-Unterquadraten). Erinnern Sie sich an das magische Quadrat. Erinnern Sie sich daran, dass Kausalität Muster erzeugen kann, die wir nicht erwarten.
Der Besucher wird gefragt: Welche Tafel ist "anders"? Warum denken Sie, dass diese anders ist? Dies kann mit dem "magischen" Spiel einhergehen, bei dem Sie erraten müssen, welche der beiden Folgen von Kopf und Kreuz in einem Gedankenexperiment und einem tatsächlichen Münzwurf 10 Mal die "erfundene" ist.

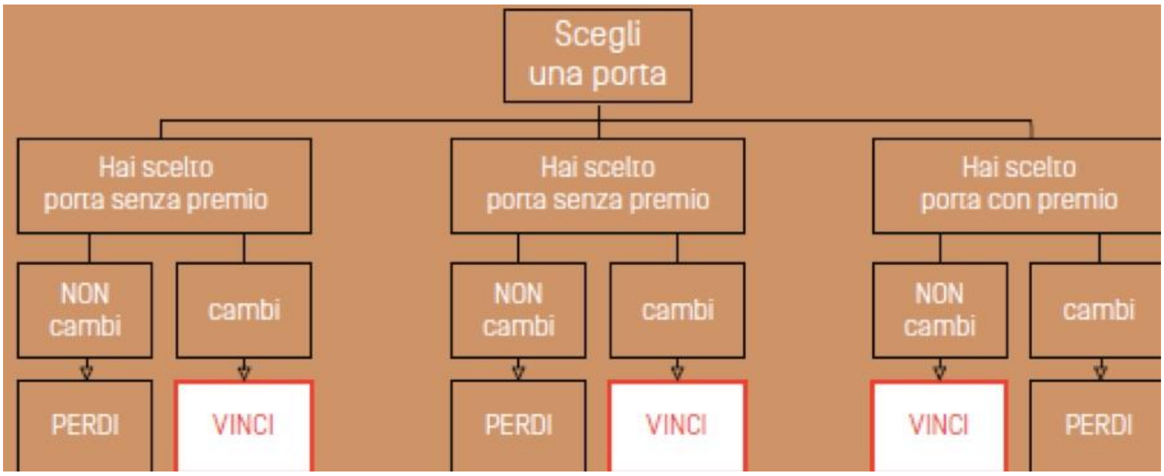
Lassen Sie den Besucher die beiden Sequenzen in einer von ihm gewählten Reihenfolge auf ein Blatt Papier schreiben und der Animateur dann raten, welche die tatsächliche Sequenz ist (d.h. aus dem tatsächlichen Münzwurf stammt) und welche erfunden ist. Beim tatsächlichen Wurf ist es wahrscheinlicher, dass es Sequenzen mit 3 oder mehr identischen Seiten der Münze gibt.

TREFFEN SIE IHRE WAHL

Was ist das? Dieses Paradoxon ist inspiriert von der amerikanischen TV-Quizshow *Let's make a deal aus* den 1960er Jahren, die von dem Moderator Monty Hall moderiert wurde. Das Spiel besteht aus drei Türen, hinter denen sich jeweils eine Prämie oder eine *Nicht-Prämie befindet. Der* Preis ist hinter einer Tür versteckt. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Preis hinter einer bestimmten Tür befindet, ist für alle Türen gleich und beträgt 1 zu 3.
Der Spieler wählt eine der Türen aus und sagt es allen. Der Betreuer weiß, was sich hinter jeder Tür verbirgt und muss eine der Türen öffnen, die der Spieler nicht gewählt hat, und zwar unbedingt eine ohne Preis: Wenn der Spieler eine Verlierertür gewählt hat, öffnet der Betreuer die andere Verlierertür, wenn der Spieler die Gewinnertür gewählt hat, öffnet der Betreuer eine der beiden verbleibenden Türen nach Belieben.

Nach dem Öffnen der ersten Tür bietet der Gastgeber dem Spieler die Möglichkeit, zu entdecken, was sich hinter der ursprünglich gewählten Tür verbirgt, oder sie zu ändern. Was ist die beste Strategie für den Spieler? Die erste Wahl beibehalten oder wechseln?

Warum eigentlich? Es scheint paradox, aber es ist besser, die ursprüngliche Wahl zu ändern: Dadurch verdoppeln Sie die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen. Wie ist das möglich?



Zu Beginn gibt es drei mögliche Szenarien, jedes mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3:
Der Spieler wählt das erste Nicht-Gewinnt-Türchen (Nummer 1). Der Gastgeber zeigt das andere Nicht-Gewinnt-Türchen (Nummer 2): Wenn der Spieler wechselt, gewinnt er. Wenn er nicht wechselt, hat er verloren.

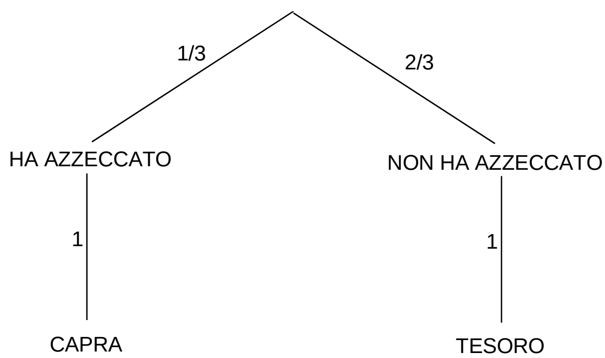
Der Spieler wählt das zweite Nicht-Gewinnt-Ziel (Nummer 2). Der Gastgeber wählt das andere Nicht-Gewinnt-Ziel (Nummer 1): Wenn er wechselt, gewinnt der Spieler. Wenn er nicht wechselt, hat er verloren.

Der Spieler wählt das Siegertor. Der Gastgeber zeigt eines der beiden Verlierertore. Wenn Sie wechseln, verliert der Spieler. Wenn er nicht wechselt, gewinnt er.
In den ersten beiden Szenarien gewinnt der Spieler nur, wenn er wechselt; im dritten Szenario gewinnt der wechselnde Spieler nicht: Die Strategie "Wechseln" führt in zwei von drei Fällen zum Sieg (2/3), während die Strategie "Nicht wechseln" nur in einem von drei Fällen zum Sieg führt (1/3).

Tatsache: Die Lösung für dieses Problem ist so kontraintuitiv, dass mehrere Akademiker sie nicht erkannten, bis sie ihnen im Detail erklärt wurde. Ein einfacher Weg, es zu verstehen, ist, die Anzahl der Tore zu erhöhen: sagen wir diesmal vier Tore, drei Verlierer und ein Gewinner. Der Spieler wählt wie zuvor ein Tor aus, aber der Gastgeber zeigt zwei - Verlierer, wie zuvor - und fragt dann den Spieler, ob er seine ursprüngliche Wahl ändern oder behalten möchte. Es gibt dann 3 von 4 Möglichkeiten, bei denen der Spieler nur gewinnt, wenn er etwas ändert, und 1 von 4 Möglichkeiten, bei denen er nur gewinnt, wenn er nichts ändert.
Das Ergebnis ist gültig und wird sogar noch deutlicher, je mehr Sie die Anzahl der Ports erhöhen.

Eine andere Art, die Lösung von Monty Halls Problem darzustellen
(mit 3 Türen, 2 Ziegen und 1 Schatz)

Wenn der Spieler sich entscheidet, bei der ersten Wahl zu bleiben, ist die Wahrscheinlichkeit, dass er richtig liegt, 1/3 (offensichtlich).
Wenn er sich entscheidet, seine erste Wahl zu verwerfen, kann die Fortsetzung mit einem einfachen Baum dargestellt werden:



P(TESORO) = 2/3 · 1 = 2/3 = 2/3 > 1/3

ROULETTE

Was ist Roulette? Roulette ist ein Glücksspiel, das auf einem Spieltisch stattfindet, auf dem sich eine Scheibe befindet, die in 37 Kästchen/Sektoren unterteilt ist, die von 0 bis 36 nummeriert sind (00 bis 36 im Falle von amerikanischem Roulette) und rot und schwarz gefärbt sind, wobei das Kästchen mit der Nummer 0 grün ist, sowie eine Wettmatte.
Das Spiel besteht darin, zu erraten, in welchem nummerierten Sektor die Kugel zum Stehen kommt.

Es gibt verschiedene Arten von Gewinnmöglichkeiten, die auf der Wettmatte angegeben sind: gerade/ungerade, rot/schwarz, exakte Zahl, Zahlenpaare/Quadrate, erstes Drittel, zweites Drittel, drittes Drittel usw., denen jeweils ein Preis proportional zum Risiko des Einsatzes entspricht.

Und warum? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, beim Roulette zu gewinnen, wenn Sie auf eine bestimmte Zahl setzen? 1 zu 37 (1 zu 38 für amerikanisches Roulette). Und wie viel gewinnen Sie?

Wir bezeichnen mit PO den "gespielten Einsatz", mit PV die "Gewinnwahrscheinlichkeit" und mit FA den "Faktor, der den Einsatz multipliziert".
Aber welche Einsätze sind für den Spieler günstig? Um dies zu verstehen, berechnen Sie einfach das Produkt aus der Gewinnwahrscheinlichkeit (PV) und dem Faktor (FA), mit dem der Einsatz multipliziert wird.

<u>**Fall 1**</u>: Der Spieler wettet auf eine Zahl, wenn er richtig rät, erhält er das 36-fache des PO, also

$$PV = \frac{1}{37} \qquad FA = 36 \qquad PV \times FA = \frac{1}{37} \times 36 = \frac{36}{37} < 1$$

Das Spiel ist also günstig für das Casino.

<u>**Fall 2**</u>: Der Spieler wettet auf 4 Zahlen und erhält das 8-fache des PO, also

$$PV = \frac{1}{37} \qquad FA = 36 \qquad PV \times FA = \frac{1}{37} \times 36 = \frac{36}{37} < 1$$

Auch hier ist das Spiel günstig für das Casino.

Fall 3: Der Spieler setzt auf eine Farbe (18 Zahlen sind rot, 18 Zahlen sind schwarz und 0 ist grün) und erhält das 2-fache des PO.

$$PV = \frac{18}{37} \qquad FA = 2 \qquad PV \times FA = \frac{18}{37} \times 2 = \frac{36}{37} < 1$$

Auch hier ist das Spiel günstig für das Casino.

Das Spiel ist also immer mehr oder weniger günstig für das Casino. Das Spiel wäre fair, wenn das Produkt aus der Gewinnwahrscheinlichkeit (PV) und dem Faktor (FA), mit dem der Einsatz multipliziert wird, gleich 1 wäre; je weiter diese Zahl von 1 entfernt ist, desto weniger fair ist das Spiel. Je mehr sie unter 1 liegt, desto mehr ist das Spiel zugunsten des Casinos.

Neugierde: Woher kommt das Roulettespiel? Es gibt viele Geschichten über seine Ursprünge. Die frühesten Beispiele von Roulette gehen bis ins 10. Jahrhundert zurück. In seiner ursprünglichen Form soll es von einem chinesischen Mönch im 14. Jahrhundert erfunden und von einem Jesuitenmissionar nach Europa gebracht worden sein. Im Allgemeinen wird es jedoch dem französischen Mathematiker Blaise Pascal (1632 - 1662) zugeschrieben, einem der größten Wahrscheinlichkeitsforscher.

LUDOPATIE

Das Material über Spielsucht stammt von Azienda Ligure Sanitaria - Regione Liguria - ALISA, CNR

Die ersten Belege für das Glücksspiel reichen über 6000 Jahre zurück und wurden in Ägypten, China, Babylon und Indien gefunden. Heute hat das Glücksspiel bedeutende Dimensionen und einen starken kommerziellen Antrieb angenommen, der auch durch Werbung wahrgenommen werden kann. Im Vergleich zu früher hat es jedoch einige Veränderungen erfahren: Es wird häufig durch einen Automaten vermittelt, findet sehr schnell statt und ist zunehmend auf den Einzelnen ausgerichtet. Aus den Daten der ESPAD-Stichprobenstudie geht hervor, dass 40 % der italienischen Schüler im Alter zwischen 15 und 19 Jahren im Laufe des Jahres Glücksspiele gespielt haben. Von diesen sind 11% gefährdet, eine Sucht zu entwickeln und etwa 8% haben bereits ein problematisches Verhalten an den Tag gelegt. Pathologisches Glücksspiel wird von internationalen nosografischen Systemen als Sucht anerkannt (DSM V - Glücksspielstörung). Es verursacht psychologische und kognitive Veränderungen, die eine wissenschaftliche Erklärung in der Untersuchung der neurobiologischen Eigenschaften des Gehirns und seiner Funktionen finden. Die Wissenschaft stellt fest, dass Glücksspiel durch Reize und Impulse exogener Natur (visuell, auditiv, taktil, olfaktorisch und gustatorisch) und endogener Natur (mnestische Evokationen und/oder viszerale Empfindungen) ausgelöst wird. Der Workshop soll über den Unterschied zwischen Spielen und Glücksspiel informieren und die Menschen für die Risiken der Verhaltenssucht sensibilisieren. Durch den Einsatz von Installationen, interaktiven und Team-Aktivitäten können die Teilnehmer die Mechanismen erleben, die dazu führen, dass Reize zu Konditionierungen werden, ihre Sinne testen und die damit verbundenen psychologischen und kognitiven Veränderungen verstehen.

Einige interessante Daten zum Glücksspiel finden Sie unter diesem Link
https://lab.gedidigital.it/finegil/2017/italia-delle-slot/

Was ist Glücksspiel?

Eine Wette, in der Regel auf Geld oder Waren, wird auf den Ausgang eines zukünftigen Ereignisses abgeschlossen. Die einmal platzierte Wette kann nicht zurückgezogen werden. Der Ausgang der Wette wird vom Zufall bestimmt. Das Können des Spielers spielt keine Rolle.

Edvard Munch - Am Roulettetisch in Monte Carlo

In Italien geht die älteste Lotterie auf das 16. Jahrhundert zurück und trägt immer noch denselben Namen: Lotto. In Genua wurde das Lottospiel 1576 zum ersten Mal in Italien legalisiert, nach einer langen, nicht anerkannten Tradition von Wetten auf viele Ereignisse (Ausgang der Dogenwahlen, Eheschließungen, Geschlecht der Ungeborenen).
In Italien wurde das Wetten auf Pferderennen mit der Einführung von Totip im Jahr 1948 zu einem beliebten Glücksspiel.
Im Großbritannien des 12. und 13. Jahrhunderts wurden Wetten auf Pferderennen, die heute zu den beliebtesten Formen des Glücksspiels gehören, als "der Sport der Könige" bezeichnet. Doch 1661 wurde das erste Gesetz zum Verbot von Glücksspielen erlassen, um zu verhindern, dass die weniger Wohlhabenden in Schulden geraten.
In Frankreich war der Philosoph Blaise Pascal im 16. Jahrhundert der Erfinder des Roulettes.
1885 baute der Amerikaner Charles Fay in Kalifornien die ersten *Spielautomaten.*
(Quelle: Arnold P. The Enrucionedio of Gomblino Chartwell Books 1977).

Roger Caillois (1913 - 1978), französischer Schriftsteller, Soziologe, Anthropologe und Literaturkritiker, schrieb die bekannteste Klassifizierung des Spiels (1962), in der die folgende Definition erscheint: '*ALEA Spiele, deren Ausgang allein durch den Zufall bestimmt werden kann, wie im Falle des Münzwurfs, bei Wetten, Roulette, Lotterie... Bei dieser Art von Spielen ist das Geschick des Spielers oft irrelevant, der Zufall ist dominant, das Risiko ist immer präsent*'.

Glücksspiel: vom Spiel zur Pathologie

Einstufung: Kategorie Süchte,
Unterkategorie: Nicht-substanzbedingte Störung.
Dies ist ein wiederkehrendes und anhaltendes problematisches Spielverhalten, das zu Stress oder einer klinisch signifikanten Verschlechterung führt.

SPIEL DER SPRUNGBRETTER UND ZARA

Pferdchen-Spiel: Es gibt elf Pferdchen, die von 2 bis 12 nummeriert sind. Die Zahlen der Pferdchen entsprechen dem Ergebnis des Wurfs von zwei normalen Würfeln (mit jeweils 6 Seiten und Zahlen von 1 bis 6). Die Pferde rücken jedes Mal einen Schritt vor, wenn ihre Zahl die Summe der beiden geworfenen Würfel ergibt. Die Würfelwürfe werden so lange wiederholt, bis eines der Pferde die Ziellinie erreicht. Auf welches Pferd sollte man besser setzen? Welches Pferd wird am ehesten gewinnen?

Und warum? Das Spiel betont, dass es sich nicht lohnt, auf die Pferde zu setzen, die am nächsten an den Extremen liegen, d.h. mit den Zahlen 2 oder 12, die am langsamsten sind. Diese Zahlen werden nämlich beim Würfeln mit zwei normalen Würfeln seltener vorkommen, da sie nur mit wenigen Kombinationen erreicht werden können.
Zum Beispiel kann Pferd 11 nur mit zwei Kombinationen weiterkommen: 11= 5 + 6 und 6 + 5. Während die mittleren Zahlen viel wahrscheinlicher sind, dass sie herauskommen.
Zum Beispiel, 7 = 1+6, 6+1, 2+5, 5+2, 3+4 und 4+3.

Wenn Sie zwei Würfel werfen - mit Werten von 1 bis 6 - können Sie insgesamt 6x6=36 Ergebnisse (mögliche Fälle) erhalten. Die Häufigkeiten der möglichen Summen sind wie folgt:

Pferd 2: 1+1 =	1/36Pferd	12: 6+6 =	1/36
Cavallino 3: 1+2, 2+1 =	2/36Pferd	11: 5+6, 6+5 =	2/36
Cavallino 4: 1+3, 3+1, 2+2 =	3/36Pferd	10: 4+6, 6+4, 5+5 =	3/36
Cavallino 5: 1+4, 4+1, 3+2, 2+3 =	4/36Pferd	9: 3+6, 6+3, 4+5, 5+4 =	4/36
Cavallino 6: 1+5, 5+1, 4+2. 2+4, 3+3 =	5/36Pferd	8: 2+6, 6+2, 3+5, 5+3, 4+4 =	5/36
Cavallino 7: 1+6, 6+1, 2+5, 5+2, 3+4, 4+3, =	6/36		

7 ist das wahrscheinlichste Ergebnis. Das bedeutet, dass es sich lohnt, auf Pferd Nummer 7 zu setzen, aber es gibt keine Gewissheit, dass es gewinnt. Der Zufall kann jedes der 11 Pferde gewinnen lassen.

Eine noch intuitivere Erklärung erhalten Sie, wenn Sie das gleiche Spiel mit 3 Pferden spielen: einem schwarzen, einem grauen und einem weißen. Um sie voranzubringen, werden 2 Kugeln aus einem Beutel gezogen. Wenn Sie 2 schwarze Kugeln erhalten, rückt das schwarze Pferd vor, wenn Sie 2 weiße Kugeln ziehen, rückt das weiße Pferd vor, wenn Sie eine schwarze und eine weiße Kugel erhalten, rückt das graue Pferd vor. Die möglichen Ergebnisse: 2 (Farben) x 2 (gezogene Kugeln) sind 4. Welches Pferd wird wohl eher gewinnen?

Schwarzes Pony:	schwarz + schwarz=	¼ (25%)
Weißes Pferd:	weiß + weiß=	¼ (25%)
Graues Pferd:	weiß + schwarz oder schwarz + weiß =2/4=1/2	(50%)

Das Lieblingspferd ist also der Schimmel!
Anhand dieses Spiels können Sie über das Thema Pferdewetten nachdenken und sich für die Bekämpfung des Glücksspiels einsetzen (siehe Registerkarte Roulette).

Kuriosität: Zara, vom arabischen Wort *zar*, Würfel, ist ein Glücksspiel, das bereits im Mittelalter beliebt war und darin besteht, drei Würfel zu werfen, auf die jeder Spieler reihum das Ergebnis einer Zahl von 3 bis 18 setzt, die der Summe der drei durch die Würfel angezeigten Zahlen entspricht. Wer zuerst rät, gewinnt. Bereits im 17. Jahrhundert war vielen hartgesottenen Spielern aufgefallen, dass 10 und 11 häufiger auftauchten als 9 und 12, aber sie verstanden nicht, warum, da diese Zahlen in der gleichen Anzahl von Kombinationen auftauchen konnten. Das Problem war so akut, dass der Großherzog der Toskana Galileo Galilei bat, es zu untersuchen

Galilei stellte fest, dass sowohl 10 als auch 11 "durch die gleiche Anzahl von *Dreiergruppen"* (die auf den drei Würfeln sichtbaren Werte) erhalten werden. Die Dreiergruppe: 1.1.2 kann auch erhalten werden mit: 1.2.1 und mit 2.1.1) und die, die sich aus *3 ergeben, alle verschiedene Zahlen*, die *auf 6 Arten gebildet werden* (z.B.: 1.2.3; 1.3.2; 2.1.3; 2.3.1; 3.1.2; 3.2.1).

Wenn Sie also richtig zählen, können sowohl 10 als auch 11 auf siebenundzwanzig verschiedene Arten (Anordnungen) erhalten werden, während 9 und 12 nur auf fünfundzwanzig Arten erhalten werden können, obwohl sie die gleiche Anzahl von Kombinationen, nämlich sechs, haben:

9 [6,2,1]*6 + [5,3,1]*6 + [4,3,2]*6 + [5,2,2]*3 + [4,4,1]*3 + [3,3,3]*1	=25	Ordnungen
10 [6,3,1]*6 + [5,4,1]*6 + [5,3,2]*6 + [4,4,2]*3 + [4,3,3]*3 + [6,2,2]*3	=27	Ordnungen
11 [6,4,1]*6 + [6,3,2]*6 + [5,4,2]*6 + [5,5,1]*3 + [5,3,3]*3 + [4,4,3]*3	=27	Aufträge
12 [6,5,1]*6 + [6,4,2]*6 + [5,4,3]*6 + [6,3,3]*3 + [5,5,2]*3 + [4,4,4]*1	=25	Aufträge

Damit sind 10 und 11 leicht im Vorteil. Die Wahrscheinlichkeit, dass 10 oder 11 herauskommt, liegt bei 12,5%, die Wahrscheinlichkeit, dass 9 oder 12 herauskommt, bei 11,6%, ein kleiner, aber entscheidender prozentualer Unterschied.

Galilei schließt seine Analyse ab, indem er schreibt:

> *"…da questa tavola potrà ogn'uno che intenda il gioco, andar puntualissima- mente compassando tutti i vantaggi, per minimi che sieno, delle zare, de gl'in- contri e di qualunque altra particolar regola e termine che in esso giuoco si osserva, etc. "*

Eine Tabelle, die der von Galileo erstellten ähnlich ist, finden Sie in der folgenden Abbildung:

DADO 1	DADO 2 *1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Combinazione	2	3	4	5	6	7
Frequenza	1	2	3	4	5	6
Tot. Casi	36	36	36	36	36	36
Probabilità	**3**	**6**	**8**	**11**	**14**	**17**

Combinazione	12	11	10	9	8
Frequenza	1	2	3	4	5
Tot. Casi	36	36	36	36	36
Probabilità	3	6	8	11	14

RANDOM WALK

Online verfügbar.

Was ist das? Das Spiel besteht darin, eine Münze zu werfen: Jedes Mal, wenn sie *Kopf zeigt, gehen Sie einen* Schritt nach rechts, wenn sie *Zahl zeigt, gehen Sie* einen Schritt nach links. Wie weit haben wir uns nach *n* Schritten vom Ausgangspunkt entfernt, der in unserem Spiel durch einen Laternenpfahl dargestellt wird? Auch hier führt uns die Intuition zu einer oft falschen Lösung.

Und warum? Nehmen wir den Fall eines Spaziergangs in einer Dimension. Da ich die gleiche Wahrscheinlichkeit habe, mich nach rechts und nach links zu bewegen, z.B. 50%, ist die durchschnittliche Entfernung vom Ursprung nach einer bestimmten Anzahl *N von* Schritten gleich Null, d.h. ich mache im Durchschnitt die gleiche Anzahl von Schritten nach rechts und nach links. Wenn wir jedoch die durchschnittliche Entfernung vom Ursprung betrachten, sieht die Sache anders aus: Angenommen, wir beginnen bei Position 0, wie weit bin ich dann nach *N* Schritten? Diese Entfernung variiert jedes Mal, wenn wir das Experiment wiederholen, aber wenn ich es viele Male wiederhole, kann ich die durchschnittliche Entfernung von der Ausgangsposition berechnen.
Die Statistik sagt uns, dass nach *N* Würfen der Münze die Entfernung vom Ursprung (Position 0) N (Quadratwurzel aus N).

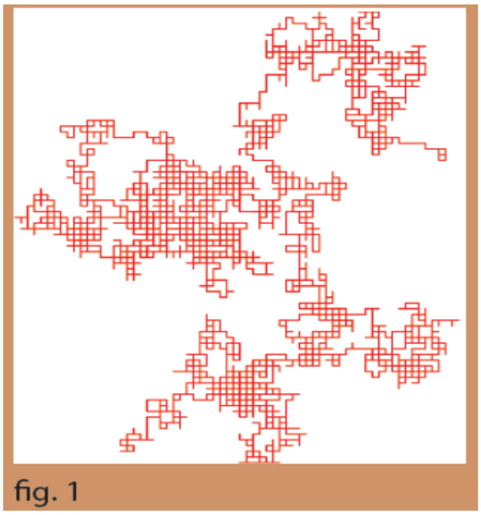


Abb. 1 Zufallsgesteuerte Wanderung in 2 Dimensionen mit 25.000 Schritten

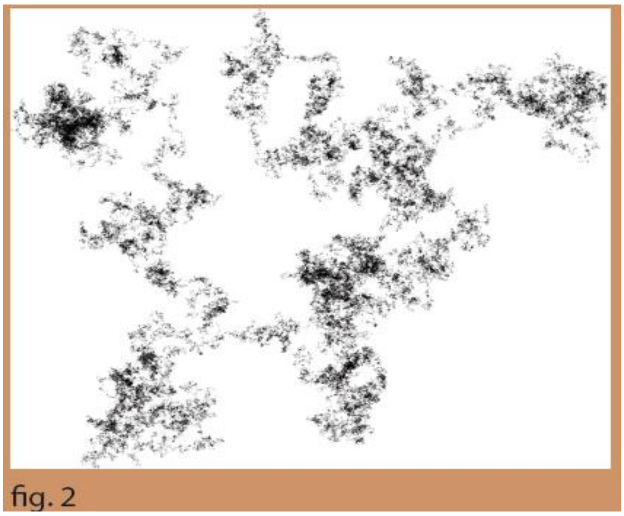


Abb. 2 Zufallsgesteuerte Wanderung mit 2 Millionen Schritten

Der von uns simulierte Random Walk findet in einer Dimension statt - Sie bewegen sich auf einer geraden Linie nach links oder rechts - aber das Modell kann auf zwei (Ebene) oder drei Dimensionen (Raum) erweitert werden. Diese Art von Modell kann verwendet werden, um die Bewegung z.B. eines Schmetterlings, eines Gasmoleküls in einem Raum oder die Entwicklung einer Aktie an der Börse zu beschreiben.

Interessante Tatsache: Der Begriff *Random Walk* wurde erstmals 1905 von dem Statistiker Karl Pearson (1857 - 1936) verwendet. Er erinnert an den torkelnden, zufälligen Gang eines Betrunkenen und eignet sich, wie erwähnt, zur Beschreibung sehr unterschiedlicher Phänomene.

DER WÜRFEL IST FERTIG (ALEA IACTA EST)

Was ist der Würfel? Der Würfel ist ein polyedrischer Gegenstand, der für verschiedene Spiele verwendet wird und dessen markierte Flächen dazu dienen, numerische oder andere Ergebnisse zufällig zu erzeugen. Würfel können verschiedene Formen haben, sie können regelmäßige oder unregelmäßige Polyeder sein. Bei einem regulären Würfel haben alle Zahlen die gleiche Wahrscheinlichkeit, ein Ergebnis zu erzielen. Der kubische Würfel ist der gebräuchlichste, das Tetraeder, das wie eine Pyramide geformt ist, wird am wenigsten verwendet, das Oktaeder ist nach dem Würfel der am häufigsten verwendete Würfel, während das Dodekaeder (12 Seiten) und das Ikosaeder (20 Seiten) in der Vergangenheit von Magiern und Zauberern für ihre Wahrsagekünste verwendet wurden.

Und warum?

1) Würfel sind ein hervorragendes Mittel, um sich mit der von Laplace (1749-1827) vorgeschlagenen **Definition der klassischen Wahrscheinlichkeit** vertraut zu machen.
   Wir gehen davon aus, dass alle Fälle gleichwahrscheinlich sind. So berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von Ereignis A:

$$Pr\ (Ereignis\ A)\ =\ günstige\ Fälle\ (bei\ Eintreten\ von\ Ereignis\ A)\ /\ mögliche\ Fälle$$

Bei einem kubischen Würfel ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Zahl herauskommt, gleich: günstige Fälle = 3; mögliche Fälle = 6;

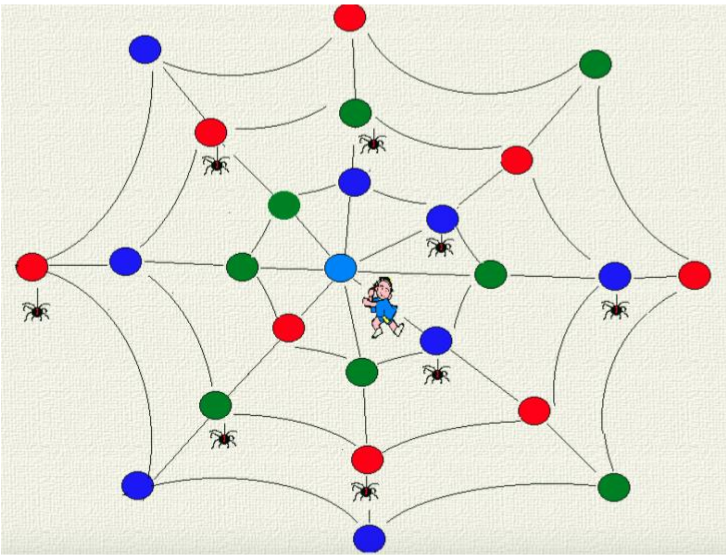
$$\Pr(gerade) = \frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$$

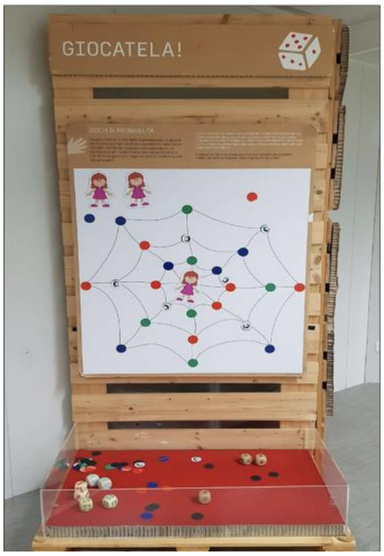
2) Aber was wäre, wenn die Würfel nicht regelmäßig wären? Die Ergebnisse wären nicht mehr äquiprobierbar und somit könnten wir die vorherige Definition nicht mehr verwenden. Wir könnten jedoch die **Definition der frequentistischen Wahrscheinlichkeit übernehmen**, nach der die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses der Anzahl der Ereignisse unter der Gesamtzahl der Versuche entspricht, die unter denselben Bedingungen durchgeführt werden und ausreichend groß sind, wenn die Anzahl der Versuche gegen unendlich tendiert. Wir wiederholen dann den Wurf eines unregelmäßigen Würfels viele Male - sagen wir hundert - und zählen, wie oft wir eine bestimmte Zahl als Ergebnis erhalten - zum Beispiel die Zahl 3. Wenn die Zahl 3 70 Mal erscheint, können wir schätzen, dass die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses drei 70% beträgt. Unsere Schätzung wird umso genauer sein, je öfter wir sie wiederholen. Aber Vorsicht, die Würfelwürfe müssen alle unter den gleichen Bedingungen erfolgen.

3) Was ist, wenn ich keine wiederholten Tests unter ähnlichen Bedingungen durchführen kann, z. B. wenn ich die Wahrscheinlichkeit einschätzen möchte, dass es morgen regnen wird? Da es darum geht, die Wahrscheinlichkeit eines nicht wiederholbaren Ereignisses unter denselben Bedingungen einzuschätzen, können wir die **subjektive Definition der Wahrscheinlichkeit** verwenden: Die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch eine Person hängt von dem Grad des Vertrauens ab, das sie aufgrund der ihr zur Verfügung stehenden Informationen hat, dass das Ereignis eintreten wird [De Finetti (1906-1985) und Savage (1917-1971)].

Neugier: Chevalier De Méré (1607-1684) war ein großartiger Würfelspieler und es war seine Leidenschaft, die ihn dazu brachte, die größten Mathematiker seiner Zeit, wie P. de Fermat und B. Pascal, zu konsultieren, um ihnen Probleme im Zusammenhang mit dem Würfelspiel zu unterbreiten. Aus diesen frühen Studien entstand die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sich mit Zufallsphänomenen beschäftigt, d.h. mit aleatorischen Phänomenen wie dem Würfeln - '*alea*' ist ein lateinisches Wort und bedeutet Würfelspiel.

SPIELEN

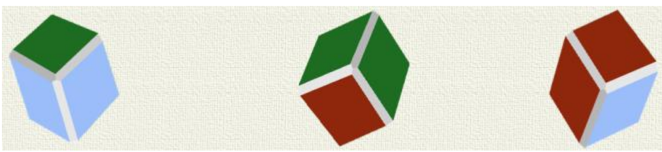




Anleitung: Das kleine Mädchen, das im Spinnennetz gefangen ist, muss den Weg nach draußen mit möglichst wenigen Schritten finden.

Um zu entkommen, kann er sich bewegen, indem er bei jedem Schritt einen Würfel seiner Wahl wirft. Jeder Würfel hat farbige Flächen, wobei in der Regel zwei verschiedene Farben in unterschiedlichen Kombinationen vorkommen. Das Kind kann sich nur auf Punkten bewegen, die mit seiner aktuellen Position verbunden sind und die Farbe haben, die beim Wurf des gewählten Würfels herauskam. Es kann vorkommen, dass einige Ergebnisse des Wurfs keine Bewegung zulassen.

Was wir lernen: Ausgezeichnete Strategie bei der Wahl der Würfel bei jedem Wurf.



NUMB3D BY NUMB3RS DATA

SCHÄTZUNGEN

Wie wird das Spiel gespielt? Ziel des Spiels ist es, zu erraten - d.h. zu schätzen - wie viele Gegenstände sich in den transparenten Plexiglasbehältern befinden. Sobald Sie sich für einen der Behälter entschieden haben (zur Auswahl stehen: Bälle, Strohhalme, Korken, Plastikbecher) und die Schätzung abgegeben haben, können Sie den genauen Inhalt sehen. Der Durchschnitt und der Median der Schätzungen, die die Besucher der Ausstellung bisher abgegeben haben, werden ebenfalls angezeigt.
Das Fenster, das sich beim Einrahmen des QR-Codes dieses Ortes öffnet, sieht wie folgt aus: www.din.usi.ch/pages/stime

EINBLICKE: MITTELWERT, MEDIAN UND MODE

Mittelwert, Mode und Median sind synthetische Indikatoren, die die zentrale Tendenz einer Reihe von Beobachtungen zusammenfassen.

ARITHMETISCHER MITTELWERT: Der arithmetische Mittelwert wird für quantitative Variablen berechnet und ist der Wert, den man erhält, wenn man numerische Daten addiert und die erhaltene Summe durch die Anzahl der erfassten Daten dividiert. Im allgemeinen Sprachgebrauch wird er in einer Vielzahl von Bereichen verwendet, von der Durchschnittstemperatur bis zum Durchschnittswähler, vom Durchschnittslohn bis zum Durchschnittsmenschen.

Beispiel: Wenn ich die folgenden Beobachtungen habe, die die Anzahl der Bälle darstellen, die von fünf Jungen gehalten werden 6,7,9,12,6, ist der durchschnittliche $= \frac{6+7+9+12+6}{5} = \frac{40}{5} = 8$Bälle. Wenn ich die Bälle unter den Jungen verteilen wollte, indem ich jedem die gleiche Anzahl gebe und die Gesamtzahl der Bälle unverändert lasse, müsste ich jedem 8 Bälle geben.
Dies ist eine wichtige Eigenschaft des arithmetischen Mittels: Es ist derjenige Wert, der, wenn er die einzelnen Beobachtungen ersetzt, die Gesamtzahl unverändert lässt.
Das arithmetische Mittel stellt den Schwerpunkt der Beobachtungen dar, d. h. die Summe der Abweichungen vom Mittelwert ist Null. Im obigen Beispiel sind die Abweichungen der Beobachtungen vom Mittelwert:

6-8 = -2   7-8 = -1   9-8 = 1   12-8 = 4   6-8 = -2

Die Addition der Abweichungen ergibt: -2 -1 +1 +4 -2 = 0

ANDERE MITTELWERTE: Es gibt andere Arten von Mittelwerten, wie das geometrische Mittel und das harmonische Mittel, die andere Funktionen der Beobachtungen unverändert lassen (das Produkt bzw. die Summe der Kehrwerte). Mehr über das **geometrische Mittel** aus historischer Sicht finden Sie in dem Dokument Galileo Galilei e la probabilità (von Mario Barra), in dem Galileo das folgende Problem behandelt:

Ein Pferd ist in Wirklichkeit 100 Scudi wert: der eine schätzt es auf 1000 Scudi, der andere auf 10 Scudi: es stellt sich die Frage, wer von beiden besser geschätzt hat und wer bei der Schätzung etwas übertrieben hat.

In der ersten Zeile sagt Galilei:
"*Ich war sofort geneigt, die Schätzung von 1.000 für übertriebener zu halten, da diese viel größere Schäden und Verluste zur Folge hatte*", aber nach sorgfältiger Überlegung kommt er zu dem Schluss:

"*Die Abweichungen der Schätzungen vom Rechten sind also nach geometrischen Proportionen zu beurteilen: und so ist derjenige, der ein Hundertstel dessen schätzt, was es wert ist, ein viel exorbitanterer Schätzer als derjenige, der es doppelt so viel oder mehr schätzt; und folglich weichen die beiden, die schätzen, der eine doppelt so viel und der andere halb so wenig, der eine zehnmal so viel und der andere nur zehnmal so viel, auch vom Rechten ab.* "

Was schließlich das **harmonische Mittel betrifft**, so sollten Sie dieses Problem berücksichtigen:
Die Familie Brambilla fährt in den Urlaub. Die Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Hinfahrt betrug 50 km/h. Die Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Rückfahrt betrug 25 km/h.
Wie hoch ist die Durchschnittsgeschwindigkeit der Reise, d.h. die konstante Geschwindigkeit, die ich sowohl auf dem Hin- als auch auf dem Rückweg hätte einhalten müssen, um die gleiche Zeit zu benötigen?
Es ist nicht das arithmetische Mittel der beiden Geschwindigkeiten, d.h. (50+25)/2 = 37,5 km/h, sondern 33,3 km/h.
Wenn die Entfernung, die Sie in den Urlaub fahren, 100 km beträgt, würde die Zeit für die Hinfahrt 2 Stunden und die Zeit für die Rückfahrt 4 Stunden betragen. Insgesamt also 6 Stunden für eine Strecke von 200 km.
Die Durchschnittsgeschwindigkeit ergibt sich also aus der Division der Gesamtstrecke (200 km) durch die Gesamtzeit (6 Stunden), d.h.: 200/6 = 33,3 km/h. Diesen Wert erhält man auch, wenn man das harmonische Mittel (d.h. den Kehrwert des arithmetischen Mittels der Kehrwerte) der beiden Geschwindigkeiten bildet: 1/ [(1/50+1/25)/2] = 33,33 km/h.

MEDIAN: Der Median ist der Wert, der in einer Reihe von Daten, die in aufsteigender oder absteigender Reihenfolge angeordnet sind, den mittleren Platz einnimmt. Der Median kann für quantitative Variablen berechnet werden, aber auch für qualitative Variablen, die geordnet werden können (z.B. Vorliebe für ein Getränk: mag ich nicht, mag ich, mag ich sehr). Wenn der Datensatz aus einer geraden Anzahl von Elementen besteht, dann gibt es nicht nur ein zentrales Element, sondern zwei. In solchen Fällen ist der Median das arithmetische Mittel der beiden zentralen Datenelemente.
Wenn wir zum Beispiel die Werte betrachten:
6, 1, 5, 2, 3,3, 4, 3, 4, 2, 0,
die der Anzahl der Bonbons entsprechen, die die 11 Schüler einer bestimmten Klasse an einem Tag essen: der erste Schüler isst 6 Bonbons, der zweite und so weiter.
Nach der Sortierung der Daten vom kleinsten zum größten Wert sieht die Serie wie folgt aus:

0, 1, 2, 2, 3,3, 3, 4, 4, 5, 6;
Der Median ist 3, denn der Wert, der die mittlere Position einnimmt, d.h. die sechste Position, ist 3. Der Mittelwert ist ebenfalls 3, weil die Gesamtzahl der gegessenen Bonbons 33 beträgt, was geteilt durch 11 (die Anzahl der Schüler) 3 ergibt. Wenn jeder Schüler 3 Bonbons gegessen hätte, wäre die Gesamtzahl der gegessenen Bonbons gleich geblieben.

Der Median ist ein Indikator für die zentrale Tendenz der Beobachtungen, der gegenüber Extremwerten robuster ist als der Mittelwert. Nehmen wir an, dass wir statt des Wertes 6 vielleicht versehentlich 61 geschrieben haben, d.h. dass die geordneten Beobachtungen sind
0, 1, 2, 2, 3,3, 3, 4, 4, 5, 61;
der Median der Beobachtungen bleibt 3.
Der Durchschnitt hingegen erhöht sich, da er durch den Wert 61 beeinflusst wird. In diesem Fall wird die Gesamtmenge der gegessenen Süßigkeiten zu 88, was geteilt durch 11 zu einem Durchschnitt von 8 führt.

Ein anderes Beispiel: Wenn ich das Durchschnittsalter von 7 Personen berechnen möchte, ordne ich sie vom ältesten zum jüngsten.
Das Medianalter ist das Alter der Person, die in der geordneten Reihenfolge die mittlere oder vierte Position einnimmt. Im folgenden Beispiel ist das Medianalter 25.

60 Jahre 30 Jahre 28 Jahre **25** Jahre 10 Jahre 8 Jahre 2 Jahre

Das Spiel ***die Weisheit der Menge*** kann zu der Einsicht führen, dass der Median in Bezug auf Extremwerte robuster ist als der Mittelwert. In Galtons Experiment mit den Bauern, die das Gewicht eines Ochsen gut einschätzen können, fasst der Mittelwert also die Weisheit der Menge gut zusammen. Bei dem Experiment zum Zählen/Schätzen der Anzahl von Bonbons, Bällen oder Plastikbechern, das wir in der Ausstellung NUMBED BY NUMBERS! durchführen, ist es besser, den Median zu verwenden, da einige Kinder - die nicht wissen, wie man die Anzahl von Bonbons, Bällen oder Bechern gut schätzt - dazu neigen, viel größere Schätzungen abzugeben als den tatsächlichen Wert.

MODUS: Der Mode- oder Modalwert eines Datensatzes ist der Wert, der am häufigsten vorkommt, wenn überhaupt. Wie das Wort schon sagt, ist Mode das, was die meisten Menschen tun. Die Aussage: 'Es ist unter Jungen in Mode, Jeans zu tragen' bedeutet, dass 'die meisten Jungen Jeans tragen'. Wenn ich mir die Haarlänge meiner Klassenkameraden ansehe und von 20 Schülern 10 kurze Haare (Bürste, d.h. weniger als 1 cm), 6 lange Haare (unterhalb der Schultern) und 4 mittlere Haare haben, schließe ich daraus, dass es in Mode ist, kurze Haare zu tragen.
Es kann vorkommen, dass es mehr als einen Modalwert gibt. Der Modalwert ist ein noch stabileres Maß als Mittelwert und Median, d.h. er ändert sich nicht, wenn außergewöhnliche Werte hinzugefügt werden. Wenn ich zum Beispiel die übliche Reihe 3, 1, 5, 3, 1, 4, 12, 7, 6, 13, 2, 5 habe, ist der Modalwert 3 und ändert sich nicht, wenn ich einen Wert von 1000 hinzufüge.

SIMULATIONEN MO DER

Vorwort Wie können wir die Beziehung zwischen zeitlich und räumlich variierenden Phänomenen erklären und Vorhersagen über ihre Entwicklung machen? Eine Möglichkeit besteht darin, Modelle zu konstruieren, die die Realität abbilden können. Dabei werden Abstraktionen in diese Modelle eingeführt, die die Komplexität der Welt um uns herum vereinfachen. Das ist es, was Statistiker und Datenwissenschaftler tun. Die Monte-Carlo-Methode - benannt nach dem berühmten Casino der Stadt - ist ein Werkzeug, mit dem diese Modelle anhand der verfügbaren Daten kalibriert werden können, damit die daraus resultierenden Vorhersagen genau sind.

Wie wird gespielt? Erstellen Sie eine unregelmäßige Figur, indem Sie die mit Klettverschluss verbundenen Holzstücke zusammenfügen und in die Mitte des roten Quadrats stellen, das eine Seite von 1 m und damit eine Fläche von 1 m^2 hat.
Wie können Sie die Fläche der unregelmäßigen Figur, die Sie erstellt haben, berechnen?
Hier ist eine mögliche Lösung: Stellen Sie sich vor, Sie lassen einen gleichmäßigen Regen von Tischtennisbällen in das rote Quadrat fallen. Wenn Sie die Bälle zählen und feststellen, dass die Hälfte davon in Ihr Strichmännchen fällt, was können Sie dann über dessen Fläche ableiten? Dass sie etwa halb so groß ist wie die des Quadrats.
Was wäre, wenn die Kugeln, die in das Innere der konstruierten Figur fielen, ein Drittel der Gesamtzahl wären? Sie würden denken, dass die Fläche der Figur etwa ein Drittel von 1 m^2 beträgt. Es ist eine Methode, die eine Schätzung der Fläche liefert, keinen genauen Wert. Wenn ich die Genauigkeit meiner Schätzung erhöhen möchte, kann ich kleinere Objekte verwenden, zum Beispiel Kichererbsen oder Sand anstelle von Tischtennisbällen. Anstatt die Kichererbsen oder Sandkörner zu zählen, kann ich sie natürlich auch wiegen.
An diesem Punkt verstehen wir die Bedeutung von Computern: Ein entsprechend programmierter Computer kann den zufälligen Fall einer großen Anzahl von Kichererbsen simulieren, er kann die Anzahl der Kichererbsen zählen, die innerhalb der unregelmäßigen Figur gefallen sind, und die außerhalb, um die Fläche einer allgemeinen Figur als angemessenen Bruchteil der Fläche des äußeren Quadrats zu schätzen, die, wie wir uns erinnern, gleich 1 m ist^2 .
Bisher haben wir mit ebenen Figuren argumentiert, aber die Argumentation kann auch auf unregelmäßige Körper ausgedehnt werden. Denken Sie an eine Käsescheibe mit Löchern. Wie können wir ihr Volumen berechnen? Oder wie können wir das Fassungsvermögen des Kofferraums eines *Kleinwagens* mit dem eines *Kombiwagens* vergleichen? Wir könnten die Anzahl der Koffer berechnen, die jeder Kofferraum fassen kann (die Koffer spielen hier die Rolle von Tischtennisbällen) und wenn wir die Genauigkeit unserer Bewertung (Schätzung) erhöhen wollen, könnten wir die Koffer durch Tennisbälle ersetzen ... denken Sie jetzt nicht daran, den Kofferraum des Autos Ihrer Eltern mit Kichererbsen oder, noch schlimmer, mit Sand zu füllen, um sein Fassungsvermögen zu schätzen - sie wären nicht sehr glücklich darüber!

Strategie: Sie füllen das rote Quadrat (und damit auch den durch die Stäbchen abgegrenzten Bereich) mit einer Schicht von Bällen. Wir zählen die Kugeln (und wiegen die Kichererbsen oder den Sand, wenn wir eine genauere Schätzung wünschen) innerhalb des roten Quadrats (einschließlich der Kugeln innerhalb der Figur). Diesen Wert bezeichnen wir mit X. Dann zählen wir nur die Kugeln innerhalb der mit den Stöcken abgegrenzten Figur. Diesen Wert bezeichnen wir mit Y. Ein einfaches Verhältnis führt zu einer Schätzung der Fläche.

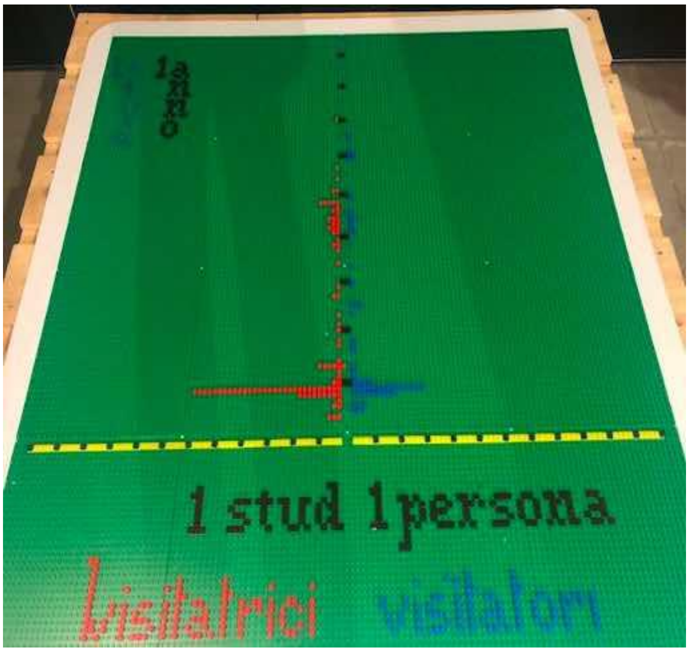
Stellen wir uns zum Beispiel vor, dass sich genau 100 Kugeln im Quadrat befinden. Und stellen wir uns vor, dass die Stöcke genau ¼ der Fläche innerhalb des Quadrats begrenzen. Innerhalb des Umfangs der Stäbchen befinden sich also ungefähr 25 Kugeln. Die entsprechende Fläche, die mit A bezeichnet wird, erhält man dann durch Lösen der Proportion:

$$25 : 100 = A : 1m^2$$

also

$$A = 25/100 \times 1\ m^2 = 0{,}25\ m^2$$

DIE PYRAMIDE DER ZEITALTER



Auf der Ausstellung «DIAMO I NUMERI!» ist Istat mit einer Station vertreten, an der wir mit demografischen Daten spielen und die Alterspyramide der italienischen Bevölkerung mit der der Ausstellungsbesucher vergleichen können. Schauen wir uns einige Fragen an, die sich spontan ergeben:

- Wie viele Jungen und Mädchen gibt es in den jüngsten Generationen?
- Wie viele Menschen in Italien sind über 90 Jahre alt?
- Werden mehr Mädchen oder Jungen geboren?
- Gibt es mehr ältere Menschen oder ältere Frauen?
- Welches ist die größte Altersgruppe?
- Und sind die Besucher der Ausstellung in Bezug auf Alter und Geschlecht dieselben oder anders als die italienische Bevölkerung?
- Können wir mit mehr Jungen als Mädchen unter den Ausstellungsbesuchern rechnen?
- Und wer begleitet sie am häufigsten? Erwachsene wie Mama und Papa oder Lehrer, oder Jugendliche wie ältere Geschwister oder später sogar die Großeltern?

Einige dieser Fragen können in den Pyramiden der Zeitalter beantwortet werden.

Die Workstation besteht aus:

- Pyramide der Zeitalter Italiens im Jahr 2018 mit Legosteinen gebaut
- Pyramide des Alters der Ausstellungsbesucher mit Legosteinen gebaut

Was ist die Pyramide der Zeitalter

Die Alterspyramide ist die grafische Darstellung der Alters- und Geschlechtsverteilung einer Bevölkerung. Sie besteht aus zwei Balkendiagrammen, die so gedreht sind, dass sie in der Mitte des Diagramms dieselbe vertikale Basis haben: das linke stellt die Altersverteilung der weiblichen Bevölkerung dar und das rechte die der männlichen. Auf der vertikalen Achse sind die Altersangaben in vollendeten Jahren angegeben (1 Knopf = 1 Jahr) und auf der horizontalen Achse die absoluten Häufigkeiten von Männern und Frauen (1 Knopf = 10 Tausend Personen in der Italien-Pyramide, 1 Knopf = 1 Person in der Besucher-Pyramide), die jedem betrachteten Alter entsprechen.

Aus der Form der Pyramide lassen sich Hinweise auf die Faktoren ableiten, die die Alters- und Geschlechtsstruktur der aktuellen Bevölkerung und ihre Entwicklung in der Vergangenheit kennzeichnen. Auch Prognosen für eine Zeitspanne von höchstens einem Jahrhundert sind möglich. Solche Hinweise lassen sich aus der Analyse der folgenden Elemente der Pyramide ableiten:

- **die Basis**: sie gibt einen Hinweis auf den Geburtenstrom: wenn sie sich verbreitert, gibt es einen stark zunehmenden Geburtenstrom; wenn sie sich verengt, bedeutet dies, dass der Geburtenstrom abnimmt.
- die Schrägstellung der Seiten: Sie gibt einen Hinweis auf den allgemeinen Grad der Eliminierung durch den Tod: ist die Schrägstellung der Seiten stark, ist die Sterblichkeit hoch, ist sie schwach, ist die Sterblichkeit gering.
- **das Vorhandensein von Ausschlägen oder Engpässen bei bestimmten Altersgruppen**: Dies ist ein Hinweis auf das Eingreifen bestimmter Störfaktoren, wie z.B. während der Weltkriege.

DIE ALTERSPYRAMIDE ITALIENS IM JAHR 2018

Die Alters- und Geschlechtsstruktur der italienischen Bevölkerung im Jahr 2018 hat ihre charakteristische Pyramidenform verloren, die für geburtenstarke Bevölkerungen mit hoher Sterblichkeit typisch ist, wie Italien vor dem demografischen Übergang und wie viele Entwicklungsländer noch heute. Die Verteilung der italienischen Bevölkerung im Jahr 2018 weist eine charakteristische Kreiselform auf, wobei der untere Teil, der der jungen Bevölkerung entspricht, dünner ist, ein schwerer Mittelteil, der der erwachsenen Bevölkerung entspricht, die um die 1960er Jahre herum geboren wurde, und eine zweite Verfeinerung im oberen Teil, der der älteren Bevölkerung entspricht, wo eine geschlechtsspezifische Asymmetrie zugunsten der weiblichen Komponente, die länger lebt, besonders deutlich wird. Wir haben es also mit einer alternden Bevölkerung zu tun, die durch niedrige und rückläufige Geburtenraten und eine niedrige Sterblichkeit gekennzeichnet ist, was die Überlebensrate auch im höheren Alter erhöht.

DIE ALTERSPYRAMIDE DER AUSSTELLUNGSBESUCHER

Jeder Besucher fügt seinen eigenen Button in die Besucher-Alterspyramide ein und platziert ihn bei seinem Alter in vollendeten Jahren, links (der rote Teil) Mädchen, Frauen und Mädchen und rechts (der blaue Teil) Jungen, Jungen und Männer.

Dies gibt Aufschluss über die Alters- und Geschlechterverteilung der Besucher. Haben mehr Männer oder mehr Frauen die Ausstellung besucht? Mehr junge Menschen, Erwachsene oder ältere Menschen?

Das Tablet enthält 2 navigierbare Seiten, 2 Videos und 1 Dokument:

1. **World Population Prospects der Vereinten Nationen**: grafische Darstellungen der Bevölkerungsprofile aller Länder der Welt. (https://population.un.org/wpp/Graphs/DemographicProfiles/)
2. **Die Weltbevölkerungspyramiden und alle Länder der Welt von 1950 bis 2100** (https://www.populationpyramid.net/it/mondo/2060/)
3. **Die Alterspyramide der italienischen Bevölkerung im Wandel von 1972 bis 2061** (http://www.istat.it/it/files/2011/05/piramide.wmv)
4. Die Alterspyramide der italienischen Bevölkerung von 2011 bis 2065 mit der Komponente der ansässigen Ausländer und der Bevölkerung im erwerbsfähigen Alter hervorgehoben
5. **Die PressemitteilungDie demografische Zukunft des Landes bis 2065.** Regionale Prognosen der Wohnbevölkerung bis 2065 (https://www.istat.it/it/files//2018/05/previsioni_demografiche.pdf)

EINFANGEN-WIEDEREINFANGEN

Die historischen Ursprünge der Fang-und-Wiederfang-Methode

Der erste, der diese Methode anwandte, war 1802 Pierre Simon Laplace, um die Bevölkerung Frankreichs zu schätzen. Er stützte sich dabei auf seine Schätzung der in einem bestimmten Jahr in Frankreich Geborenen und der in bestimmten französischen Gemeinden Geborenen und Ansässigen, die in ihrer Verwaltung besonders geordnet und genau waren.

Auf eine zweite dokumentierte Anwendung müssen wir fast ein Jahrhundert warten, und zwar im Jahr 1896, als der dänische Meeresbiologe Johannes Petersen das zahlenmäßige Vorkommen von Schollen in einem bestimmten Meeresabschnitt schätzte.

Die Formel zur Schätzung der Population anhand der Fang- und Wiederfangmethode ist auch als "Lincoln-Petersen-Schätzung" oder "Chapman-Schätzung" bekannt.

Wie funktioniert die Fang-und-Wiederfang-Methode?

Die 'Capture-Recapture-Statistik', auf Englisch ***Capture-Recapture*** oder auch ***Capture-Mark-Recapture***, ist eine statistische Methode, die in den Biowissenschaften verwendet wird, um die Größe oder Abundanz einer Tierpopulation oder einer anderen biologischen Gruppe in einer natürlichen Umgebung zu schätzen. Diese Methode wird häufig verwendet, um die Anzahl der Individuen einer Art zu schätzen, wenn es schwierig ist, sie direkt zu zählen. Sie wird häufig in der Ökologie und Naturschutzbiologie verwendet.

Die Methode des Einfangens und Wiedereinfangens basiert auf einem Prozess, bei dem die Tiere eingefangen, markiert (z. B. mit einer nicht schädlichen Markierung wie einem Schild oder Armband) und dann in ihre natürliche Umgebung entlassen werden. Anschließend werden einige Tiere erneut gefangen und die Anzahl der markierten Individuen unter den gefangenen Tieren wird erfasst. Diese Informationen werden dann verwendet, um die Gesamtpopulation zu schätzen.

Die Methode wird auch in der Medizin verwendet, um abzuschätzen, wie viele Personen von einer bestimmten Krankheit betroffen sind, z.B. von Diabetes.

Die statistische Grundlage der Methode

Versuchen wir, die Schätzung von Petersen aus dem Jahr 1896 nachzuvollziehen.

- In dem Meeresabschnitt, der uns interessiert, wird es eine Reihe von **N-Flundern geben**, die wir nicht im Voraus kennen.

- Wir spazieren entlang der besagten Strecke und fangen Flundern im Netz. Wir markieren sie auf eine unauslöschliche Weise und werfen sie zurück ins Meer.
- Wir geben den auf der ersten Fahrt gefangenen Flundern ein paar Tage Zeit, um sich von ihrem Schreck zu erholen und zum Alltag zurückzukehren, und gehen dann auf eine zweite Fangreise. Dieses Mal fangen wir **K** Flundern
- Unter ihnen finden wir einige, **k,** die in der ersten Runde markiert wurden.

Um über die Zahlen, die wir gesammelt haben, nachzudenken, müssen wir einige ideale Bedingungen voraussetzen:

- die erste Hypothese: dass die Flunderpopulation in diesem Abschnitt **geschlossen ist**, d.h. dass sie in den Tagen zwischen dem ersten und dem zweiten Fang unverändert geblieben ist, also keine Geburten, keine Sterbefälle und keine Zu- oder *Abwanderer;*
- zweite Hypothese: dass Individuen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, gefangen und wieder eingefangen zu werden; das Fangkriterium darf also in keiner Weise bestimmte Merkmale von Individuen begünstigen;
- die dritte Hypothese: dass die Markierung das Verhalten der markierten Individuen nicht verändert, dass also zum Beispiel die erlebte Erfahrung sie nicht vorsichtiger macht und sie dazu veranlasst, ein erneutes Einfangen zu vermeiden.

Aber wie viele Flundern gibt es denn?

Zu diesem Zeitpunkt kann davon ausgegangen werden, dass die wieder gefangene Stichprobe repräsentativ für die gesamte Population ist. Dann kann davon ausgegangen werden, dass der Anteil der markierten Flundern im Verhältnis zur gesamten Flunderpopulation (**n / N**) gleich dem Anteil der wieder gefangenen Flundern ist, die markiert sind (**k / K**).

Es genügt dann, die Gleichung für das unbekannte N zu lösen:

$$N = \frac{n \cdot K}{k}$$

Ein Beispiel. Nehmen wir an, dass in der ersten Runde 100 Schollen (**n = 100**) gefangen werden, die markiert und vorsichtig ins Meer zurückgeworfen werden. In der zweiten Runde werden erneut 100 Schollen (**K = 100) gefangen,** von denen 5 markiert werden (k **= 5**).

Die geschätzte Anzahl **N der** Flundern in diesem Meeresabschnitt beträgt also:$N = \frac{n \cdot K}{k}$

$$N = \frac{100\ x\ 100}{5} = 2.000$$

Dabei handelt es sich natürlich um eine Schätzung und nicht um einen exakten Wert, da eine statistische Stichprobenmethode verwendet wird. Wie wahrscheinlich die Schätzung ist, hängt sowohl davon ab, wie realistisch die drei getroffenen Annahmen sind, als auch von der Anzahl der untersuchten Individuen. Es gibt Verfeinerungen der Methode, um die Plausibilität des Ergebnisses zu verbessern, auch wenn beispielsweise eine nicht geschlossene Population vorliegt, aber die Methode liefert dennoch eine Schätzung.

In der Post bei der Ausstellung

Spielanleitung: Ziel ist es, die Anzahl der weißen Tischtennisbälle in einem Behälter mit weißen und gelben Bällen zu schätzen. Es können nacheinander mehrere Hände voll genommen werden. Ein Bleistift wird zur Verfügung gestellt.

Strategie: In der ersten Handvoll markieren Sie alle ausgewählten weißen Kugeln mit einem x in Bleistift. Dann legen Sie sie zurück in den Behälter und mischen die Kugeln. In der zweiten Handvoll zählen Sie, wie viele der mit einem x markierten Kugeln wieder ausgewählt wurden. Auch hier wird ein Verhältnis verwendet, um die Anzahl der weißen Kugeln zu schätzen.

Andere externe Ressourcen:
https://olmo.deib.polimi.it/ecologia/dispensa/node30.html

ZÄHLER

Wir haben die folgenden 4 Zähler bei http://www.worldometers.info gekauft:

1) Weltbevölkerung
2) Weltweite öffentliche Ausgaben (in USD) für Bildung heute
   ('heute' beginnt um Mitternacht der Computeruhr, auf der der Zähler installiert ist)
3) Seit Anfang des Jahres zerstörte Hektar Wald
4) Tage bis zum Ende der Ölreserven

Auf dieser Seite finden Sie verschiedene andere Zähler und können interessante Vergleiche anstellen.
Zum Beispiel gibt die Welt weniger für Bildung als für Gesundheit und etwa doppelt so viel wie für das Militär aus.
Hier finden Sie einige Informationen zu den Bildungsausgaben in Italien
https://www.ilsole24ore.com/art/notizie/2017-08-29/italia-terzultima-europa-spesa-istruzione-germania-spende-doppio-190050.shtml?uuid=AE8jEVJC

MASCHINEN, DIE BILDER ANALYSIEREN

Daniele Schicchi und Domenico Amato
Doktoranden in Mathematik und Computerwissenschaften
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Palermo

Systeme der künstlichen Intelligenz, die in der Lage sind, Bilder zu analysieren, indem sie das typische Verhalten des menschlichen Sehens nachahmen, werden heutzutage immer beliebter. Solche Systeme können eine Vielzahl von Anwendungen unterstützen, wie z.B. die *Analyse und Erkennung von Gesichtern, Roboterleitsysteme, Videoüberwachung, Gebietsinspektionen durch unbemannte Luftfahrzeuge (UAV), usw*.
Das Exponat zeigt ein System mit künstlicher Intelligenz, das durch die Analyse eines Videos das Vorhandensein eines Gesichts erkennt und durch eine Reihe von Steuerungsoperationen auf seiner Wissensbasis in der Lage ist, das erkannte Gesicht einer Identität zuzuordnen, die dann auf dem Bildschirm angezeigt wird. Wenn das System keine Informationen über das untersuchte Gesicht hat, stuft es die Person als *unbekannt ein*. Es wird darauf hingewiesen, dass man nur *einen*

Computer, eine Kamera und Kenntnisse in einer Programmiersprache wie *Python* und der *face_recognition-Bibliothek*[1] benötigt, um ein eigenes Gesichtserkennungssystem zu implementieren. Systeme, die in der Lage sind, ein Gesicht selbstständig zu erkennen, sind eine Technologie, die bereits seit 1965 erforscht wird, aber im Laufe der Jahre immer weiter verbessert wurde, so dass sie heute alltäglich geworden ist. Die geringe Fehlerquote solcher Technologien hat ihren Einsatz in einer Vielzahl von Kontexten ermöglicht, die sich auf die Veränderung unserer Lebensweise auswirken. Tatsächlich können wir häufig beobachten, dass das Gesicht als Schlüssel zum Entsperren des *Smartphones* oder für den Zugang zu unserem persönlichen Bankbereich verwendet wird, wir haben die Möglichkeit, das gesamte Internet nach einem Gesicht zu durchsuchen, dessen Informationen wir erhalten möchten, und viele soziale Netzwerke sind in der Lage, uns zu warnen, wenn wir auf einem von einem anderen Benutzer hochgeladenen Foto erscheinen. Ein solcher technologischer Fortschritt bringt eine Reihe von positiven und negativen Aspekten mit sich, über die der Besucher nachdenken sollte. Weltweit sind schätzungsweise 245 Millionen Überwachungskameras installiert, und mit der Genauigkeit der heutigen Gesichtserkennungssysteme könnte eine Maschine beispielsweise problemlos die Bewegungen einer Person verfolgen und damit potenziell ihre *Privatsphäre verletzen*. Es gibt Software, die das Gesicht einer Person unter Tausenden in weniger als einer Sekunde erkennen kann, und diese Erkennung erfolgt oft in völliger Unkenntnis der Personen.

Genauer gesagt ist ein Gesichtserkennungssystem eine Technologie, die in der Lage ist, eine Person anhand eines Bildes oder Videos zu identifizieren. Das System analysiert die vom Bild-/Videoaufnahmesystem erfassten Bilder Pixel für Pixel und sucht nach Formen, die auf das Vorhandensein eines Gesichts hindeuten. Seine Funktionsweise basiert auf Algorithmen, die die Merkmale des im Eingangsbild erkannten Gesichts extrahieren und sie dann mit den Merkmalen des Gesichts in einem anderen Bild vergleichen. Einige dieser Merkmale könnten zum Beispiel die *Position, Größe und Form der Augen, der Abstand zwischen Nase und Mund und die Größe des Gesichts sein*. Die extrahierten Informationen werden mit Hilfe mathematischer Funktionen verarbeitet, die es dem System ermöglichen, die Unterschiede zwischen zwei Gruppen von Merkmalen zu ermitteln, um ein bekanntes Gesicht zu erkennen. Wenn die gefundenen Unterschiede vernachlässigbar sind, kann davon ausgegangen werden, dass die beiden Gesichter zu ein und derselben Person gehören.

VIDEOPROJEKTIONSRAUM

In diesem Raum befinden sich vier Videos:

- eine, die vom CSCS - Schweizerisches Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen
- zwei Produkte von ISTAT
- eine von Prof. Antonietta Mira in Zusammenarbeit mit Paolo Zanocco und Ilaria Curti erstellte Studie mit dem Titel Angels of Big Data.

Angels of Big Data veranschaulicht die Chancen und Ängste, die Big Data (große Datenmengen, die wir selbst erzeugen, wenn wir unser Leben der Technologie anvertrauen) mit sich bringt.

Unter diesem Link finden Sie einen Vortrag von Prof. Antonietta Mira zu den im Video dargestellten Themen.
https://www.youtube.com/watch?v=kItlFRDF5XU
https://www.brainforum.it/video/big-data-lombra-inquietante-del-grande-fratello/
https://www.youtube.com/watch?v=T1eH2yhjHZc

Die beiden ISTAT-Videos können Sie unter diesen Links ansehen:
die erste ist für Erwachsene: https://youtu.be/OSGs1FVhkpY.
Die zweite ist für die Jungen: https://youtu.be/awdHmoWyFuE.

Dies ist die Website des Schweizerischen Zentrums für Wissenschaftliches Rechnen (CSCS), das eines der Videos aus dem Kinosaal produziert hat:
https://www.cscs.ch/about/about-cscs/

NUMB3D BY NUMB3RS!

GESCHICHTEN VON ZAHLEN

GESCHICHTE DER URI

Dies ist eine Geschichte, die sich vor langer Zeit in einem Dorf in Mesopotamien ereignete, wo das Volk der Sumerer lebte, zu dem auch der kleine Uri gehörte. Inmitten der Geräusche und Klänge, die aus dem Dorf kamen, konnte man gelegentlich einen Ruf vernehmen: - Uri! Uri! Es war seine Mutter, die einige Besorgungen für ihn hatte: - Ich brauche etwas Hüttenkäse. - Ja, Mutter. Wie viel? - In jenen Tagen konnten die Männer noch nicht lesen und schreiben. Sie konnten ein wenig mit den Fingern zählen, aber nicht so viel und nicht so gut wie wir. Mutter zeigte dann mit den Fingern, wie viel Ricotta-Käse sie wollte. Mit seiner kleinen Hand machte Uri die Geste seiner Mutter sorgfältig nach und ... los ging's! Und als der Korb voll war, kehrte Uri nach Hause zurück, um den Ricotta zu deponieren, und rannte dann los, um bis zum nächsten Anruf zu spielen.

- Uri! Uri! - Ja, Mama? - Ein paar Eier. - Wie viele? Uri näherte sich, um eines nach dem anderen mit seinen kleinen Fingern zu platzieren, wie Mama es gezeigt hatte, und dann... rannte sie los! Während Uri den Weg entlanglief, flog ein wunderschöner Schmetterling vorbei und mit zwei flinken Sprüngen fing Uri ihn auf. Er hob seine Arme in den Himmel und hielt einen Moment inne, um zu beobachten, wie der Schmetterling sich von seinen Händen entfernte und ... - O nein! Die Hände! Ja: was nun? Uri musste zurück zu seiner Mutter gehen, um zu sehen, wie viele Eier noch benötigt wurden. Mutti zeigte dann wieder ihre Finger und Uri war wieder unterwegs. Aber egal, ob es sich um einen bunten Schmetterling oder einen schönen, glänzenden Stein handelte, Uri schaffte es nur selten, sein Ziel zu erreichen, ohne den Überblick zu verlieren. Hier brauchte er eine Idee. Eines Nachmittags, als Uri wie üblich seine Hände im Lehm am Ufer rührte, kam ihm die Idee. - Klar, ich mache einfach meine Finger aus Lehm und benutze sie zum Zählen, dann habe ich endlich die Hände zum Spielen frei! Wenn Mama ihm nun zeigte, wie viele Maß Gerste er brauchte, stellte er einen kleinen Kegel neben jeden von Mamas ausgestreckten Fingern, sammelte sie alle in der Blase und ... weg war er!

Einmal, vielleicht weil die Zeit des großen Dorffestes nahte, bat Mama Uri, ihr Finger und Finger und noch mehr Finger von reifen Datteln zu bringen. All diese Finger wurden langsam mühsam und Uri konnte nicht mehr fröhlich herumhüpfen.

Als Uri eines heißen Nachmittags am Flussufer saß und neue Finger knetete, kam ihm die Idee: Statt all dieser Finger werde ich Kugeln machen. Also knetete er den Ton und formte viele schöne Kugeln, nicht zu groß, damit sie nicht zu viel wiegen würden. Von diesem Moment an ließ Uri jedes Mal, wenn es ihm gelang, zwei volle Finger zusammenzulegen, diese verschwinden und eine Kugel an ihre Stelle setzen. Uri ging nun mit seinem kleinen Haufen von drei oder vier kleinen Köpfen und ein paar losen Fingern.

Aber die Schwierigkeiten nahmen kein Ende: Was war, wenn er den plötzlichen und dringenden Drang verspürte, einen Purzelbaum zu schlagen? Wenn er sich nicht beherrschte, würde es wieder Ärger geben: Kegel und Bälle überall verstreut.

Ich überlegte und überlegte, und dann kam mir eine andere Idee. - Aber natürlich! Ich werde große Kugeln aus weichem Ton formen, die ich dann wie Scones zerdrücke. Darin werde ich die Abdrücke der Kieselsteine machen, die ich zu Hause in der Blase lassen werde. Nur die Fußabdrücke! Und so konnte Uri zwischen Sprüngen und Purzelbäumen die Tonkugel in die Luft werfen und sie ohne weitere Sorgen wieder aufheben.

Die Probleme nahmen jedoch kein Ende. Wenn Uri nun älter war, wurden auch die Besorgungen seiner Mutter schwieriger. So brauchte sie Nüsse, Feigen, Schüsseln mit Milch und Säcke mit Mehl, und zwar sofort, alles auf einmal, und natürlich hatte jedes Ding seine eigene Anzahl von Fingern. Wie man das macht? Für jeden einen Laib Brot mitnehmen? Auf Wiedersehen, freie Hände! Und wie sollte man sich merken, welcher Laib für die Nüsse war und welcher für die Milch oder die Feigen oder das Mehl? Hier brauchten wir eine Idee. Eines Abends bei Sonnenuntergang, als Uri am Flussufer saß und mit kleinen Zweigen den Lehm aufkratzte, kam ihm die Idee. - Natürlich werde ich auf meinen Laib die Nüsse, die Feigen, die Milch, das Mehl und ... neben den Kieselsteinen. Nachdem er sich einen schönen geraden Stock ausgesucht hatte, schrieb Uri, wie er zum ersten Mal hörte, das, worum ihn seine Mutter gebeten hatte. Das war eine wirklich, wirklich gute Idee gewesen. Von diesem Tag an bis heute haben sich die Dinge ein wenig verändert. Heute haben wir Buchstaben, Zahlen, Papier und Stifte. Aber was wäre, wenn Uris Idee in jener Nacht nicht gekommen wäre? Wer weiß das schon.

In der Zwischenzeit hat Uri, der jetzt erwachsen ist, mit seinen Brötchen alle Besorgungen sehr gut gemacht.

Jetzt wandte sich nicht nur die Mutter, sondern jeder, sogar die Adjutanten des Königs und der König selbst, an Uri, wenn es etwas zu zählen gab.

Entnommen aus: *Uri, der kleine Sumerer* von Raffaella Petti, 2009, Il Giardino di Archimede.

DER TRIUMPH DER NULL

Es war einmal
eine arme
runde
Null
die so
gut wie ein
O war,
aber
genau null zählte
und die niemand in ihrer Gesellschaft haben wollte, um
sich nicht wegzuwerfen. Einmal
fand er zufällig Nummer Eins
in schlechter Laune
vor, weil
er nicht
bis drei
zählen konnte.
Als er ihn so schlecht gelaunt sah, fasste der
kleine Zero
Mut,
bot ihm eine Fahrt
in seinem Auto an
und trat auf das Gaspedal,
sehr stolz auf die Ehre,
einen solchen Charakter
an Bord zu haben. Und
wer steht da plötzlich
auf dem Bürgersteig?
Herr Drei nimmt seinen Hut ab
und verbeugt sich...
Und dann, Donnerwetter,
tun
Sieben, Acht und Neun
dasselbe.
Aber was war passiert?
Dass die Eins und die Null,
die nebeneinander saßen,
der eine hier, der andere dort,
eine große Zehn bildeten: eine
Autorität, nicht weniger!
Von diesem Tag an
war
Zero
sehr geachtet,
ja begehrt
und umworben
von allen Zahlen:
Sie gaben ihm

mit Eifer und Sorgfalt
die rechte Hand
(sie hatten Angst,
ihn auf der linken zu halten),
luden ihn zum Essen ein,
bezahlten für sein Kino,
für den kleinen Zero
war es Glück.

Entnommen aus: *Il trionfo dello zero* von Gianni Rodari, 2011, Emme Edizioni.

DAS PROBLEM DER VIER

Eines Tages war die Zahl Vier es leid, gerade zu sein. Ungerade Zahlen, dachte er, sind viel fröhlicher und witziger. Und er hatte genug von seiner etwas faden, stuhlartigen Form. Und er hatte es satt, zwei plus zwei zu sein, was jeder weiß, und in der Tat, wenn jeder etwas sagen will, was jeder weiß, sagt er: Wie viel ist zwei plus zwei?
Sehen Sie sich die Sieben an, sagte er sich, so schnell und elegant, und die Drei so rund und witzig. Er träumte davon, eine ungerade Zahl zu sein, wie drei, wie fünf, wie sieben.

Ein Problem wie dieses wussten vier nicht zu lösen. Vielleicht hatte es nicht einmal eine Lösung. Wenn doch, dann musste der Große Mathematiker sie kennen. Also ging Vier zu dem Großen Mathematiker und trug ihm sein Anliegen vor. Der Große Mathematiker lächelte. Auch er hatte sich einmal gewünscht, anders zu sein: natürlich nicht anders, denn er wollte er selbst bleiben, aber ein wenig mehr wie der Große Musiker oder der Große Regisseur oder der Große Tennisspieler. Auch er hatte also das Problem der Vier gehabt und wusste, wie man damit umgeht.

Sie zwang ihn, sich auf den Boden zu setzen (ein Stuhl wäre nutzlos gewesen) und begann, mit ihm zu sprechen. - Sehen Sie, Vier", sagte er, "es gibt keinen Grund, anders zu werden, zum Beispiel sonderbar oder lang und schwierig. Das ist nicht nötig, denn Sie sind bereits anders und einzigartig, auch wenn Sie sich dessen nicht bewusst sind. Sie scheinen ein dummer kleiner Sitz zu sein, der zwei und zwei zusammenzählt und jeder weiß es, aber stattdessen gibt es Dinge in Ihnen, die niemand sonst hat, ganz besondere Dinge. Zum Beispiel sind Sie zwei plus zwei, aber auch zwei für zwei und auch zwei für zwei. Und das ist etwas ganz Besonderes. Drei plus drei ist nicht auch drei für drei, geschweige denn drei zum Dritten! Und dann merken Sie, die Sie die Drei so sehr bewundern, nicht, dass sie bereits in Ihnen steckt, denn es ist wahr, dass Sie zwei plus zwei sind, aber es ist auch wahr, dass Sie drei plus eins sind, die ersten ungeraden Zahlen der ganzen unendlichen Zahlenkette. -

Zu diesem Zeitpunkt war Nummer Vier ziemlich verwirrt und sogar ein wenig verärgert, denn die Tatsache, dass er das, was er im Äußeren suchte, bereits in sich trug, schien ihm etwas wirklich Wichtiges zu sein und etwas, worüber er nachdenken musste. Er bat den Großen Mathematiker, damit aufzuhören und ging. Seitdem hat Nummer Vier erkannt, dass er viel mehr zählt, als er dachte, und er entdeckt jeden Tag, dass er immer anders ist und sich selbst so mag.

Filosofia in cinquantadue favole, Ermanno Bencivenga, 2011, Mondadori.

Es gibt kein Glück: Es gibt den Moment, in dem Talent auf eine Gelegenheit trifft.

Seneca (4 v. Chr. - 65 n. Chr.)

STATISTIK ODER GLÜCK?

EINE MÖGLICHKEIT, BEIM WÜRFELN ZU GEWINNEN.

G. Bartolomei* O. Giambalvo**
* Liceo Scientifico 'Benedetto Croce' Palermo
**Abteilung für Wirtschaft, Business und Statistik, Universität Palermo

Der Beitrag beschreibt die Erfahrungen mit einer vom *Piano Nazionale Lauree Scientifiche* (PLS) geplanten Aktivität, die an der Benedetto Croce Scientific High School in Palermo durchgeführt wurde. Es handelt sich dabei um eine Aktivität mit dem doppelten Ziel, die Kenntnisse junger Schüler im Bereich Statistik zu fördern und ihnen eine fundierte Entscheidung für ein Universitätsstudium zu ermöglichen.

Das Perudo: Vom Spiel zur Statistik. Wenn Würfel nicht zählen

Perudo ist ein würfelbasiertes Brettspiel, das seinen Ursprung in Peru hat - daher der Name - und bis in die Zeit der Inkas zurückreicht. In Wahrheit hat es eine Vielzahl von Ursprüngen, unter anderem bei vielen nordamerikanischen Indianervölkern. Von Peru aus soll es nach Spanien gelangt sein und sich dann im 15. Jahrhundert durch die Konquistadoren in den Rest der Welt verbreitet haben. Ihre Berühmtheit verdankt sie dem Film 'Fluch der Karibik - Der Fluch der Phantomtruhe auf dem Schiff der Flying Dutchman'. Einige Protagonisten wie Bootstrap Bill, Davy Jones und Will Turner vertrauen die Entscheidung dem Gewinner des Spiels an, der aufgrund seines Sieges als geschickt im logischen Denken und in der Schlussfolgerung gilt.

Es wird hier als Beispiel beschrieben, um die Nützlichkeit des statistischen Denkens zu verdeutlichen (das es - mit etwas Glück - ermöglicht, das Spiel zu gewinnen), das sich bei den Spielern fast unbewusst entwickelt. Das Beispiel wird angeführt, weil man im Klassenzimmer mit dem Spiel unter den Schülern fortfahren und einen *Brainstorming-Ansatz* verfolgen kann, um alle statistischen Konzepte und Informationen, die vorhanden sind oder vermittelt werden sollen, zu verbalisieren und sich darauf zu konzentrieren.

Das Ziel des Spiels ist es, als letzter Spieler mit mindestens einem Würfel im Spiel zu bleiben. Es können zwischen 2 und 6 Spieler teilnehmen. Jeder Spieler hat einen Zirkel mit 5 Würfeln. Die Würfel zeigen die Seiten 2 bis 6. Die Seite Nummer eins wird durch die Inka- oder Lama-Seite ersetzt.

Sie beginnen mit einem Zirkel mit jeweils fünf Würfeln. Die Würfel werden alle zusammen gemischt und jeder Spieler sieht sich seine eigenen Würfel an, ohne sie seinen Gegnern zu zeigen. Das eigentliche Spiel besteht aus einer Reihe von Erhöhungswetten auf die Gesamtzahl der Würfel (Vorkommen) mit dem gleichen Wert (der gleichen Würfelseite) unter allen Spielern.

Reihum erklärt der erste Spieler, nachdem er das Ergebnis seiner Würfel gesehen hat, einen Einsatz auf einen Würfelwert, der als am häufigsten vorkommend angesehen wird, und auf die Häufigkeit dieses Wertes. Der Spieler mit der Hand muss zunächst entscheiden, ob er mit einem anderen Einsatz erhöhen oder den Einsatz des vorherigen Spielers bewerten möchte. Die Deklarationen/Wetten basieren auf den Beweisen der eigenen Würfel und den Deklarationen der vorherigen Spieler. Nach diesen Erklärungen kann man davon ausgehen, dass eine bestimmte Anzahl von Würfeln mit einem bestimmten Wert am Tisch vorhanden ist.

Bevor Sie die Wette abschließen, müssen Sie bedenken:

a) wie viele Würfel insgesamt im Spiel sind. Bei jeder Runde, während das Spiel fortschreitet, gehen Würfel verloren und scheiden somit aus dem Spiel aus. Da auch die verlierenden Spieler Würfel verlieren, können sich erfahrene und vorsichtige Spieler genau merken, wie viele Würfel noch im Spiel sind, und so ihre Wetten/Annahmen mit größerer Präzision und Genauigkeit treffen;
b) alle Inka- oder Lama-Köpfe zählen als Joker. Das macht es noch schwieriger, plausible und damit gewinnbringende Annahmen zu treffen.

Der nächste Spieler kann den Einsatz mit einem höheren Vorkommen auf demselben Würfelwert oder mit demselben Vorkommen aber einem anderen Würfelwert als der vorherige Spieler erhöhen. Zum Beispiel, wenn der erste Spieler zu Beginn des Spiels deklariert:
10-5 bedeutet, dass er anhand seiner Würfel (die einzigen, die er kennt, weil sie ausgestellt sind) verallgemeinert, dass es unter allen Spielern 10 Würfel mit der Augenzahl 5 gibt.

Im ersten Fall kann er seine Vermutung von 10-5 anstellen und kann somit:

a) Wette auf 10-x, wobei x eine der Würfelseiten außer 5 ist;
b) Wetten auf eine Zahl größer als 10-5 (z.B. 11-5),
c) Schließlich kann er die Zahl 10 halbieren und 5-Lama, d.h. den Joker, setzen.

Im zweiten Fall kann der Spieler, der die Hand hält, den Einsatz des Spielers, der vor ihm gesetzt hat, bewerten. In diesem Fall sagt er *Dubito*, wenn er die Wette für falsch hält; oder er kann die Wette für richtig halten: In diesem Fall sagt er *Calza*.

Im Allgemeinen bedeutet "*Socken"* die Feststellung, dass die vorherige Aussage richtig ist. Wenn die Aussage richtig ist, kauft der Spieler, der Socke sagt, einen Würfel und der herausgeforderte Spieler verliert ihn, andernfalls verliert der Spieler, der Socke gesagt hat;
Zweifelhaft bedeutet, dass die vorherige Aussage nicht wahr ist, weil die Anzahl der tatsächlichen Würfel vermutlich geringer ist als die angegebene Anzahl.

Wenn die Erklärung richtig ist, verliert der herausgeforderte Spieler einen Würfel, andernfalls verliert der Spieler, der gezweifelt hat, den Würfel.

In dem Moment, in dem ein Spieler Dubito (im Falle einer als zu riskant erachteten Wette) oder Calza (im Falle einer als fair erachteten Wette) gesagt hat, müssen alle Spieler ihre Würfel aufdecken und die Richtigkeit der letzten Erklärung/Wette wird überprüft. Sie können jederzeit während des Spiels auf die Inka- oder Lama-Köpfe setzen, indem Sie den Einsatz des letzten Ereignisses durch zwei teilen.

Wenn der Spieler auf der Hand es vorgezogen hat, einen Tipp abzugeben, geht das Spiel an den nächsten Spieler über, der sich in derselben Position wie der vorherige Spieler befindet.
Wenn ein Spieler zum ersten Mal mit nur einem Würfel im Spiel bleibt, wird er zum *Staker* erklärt. In diesem Fall darf der eingesetzte Spieler zu Beginn der Runde den Wert wählen, auf den er für die gesamte Runde setzt und der nicht geändert werden kann. Während der Runde zählen die Klingenköpfe nicht als Joker. Es ist nur einmal im gesamten Spiel möglich, sich zum *Staker zu* erklären.
Jede Runde endet mit dem Verlust des Würfels durch den Spieler, der falsch gewettet oder gezweifelt hat, oder mit dem Gewinn des Würfels durch den Spieler, der die genaue Anzahl der Vorkommen und den Wert durch das Sagen von Socke ermittelt hat. Im ersten Fall beginnt die nächste Runde mit dem Spieler, der den Würfel verloren hat, ansonsten geht es im Uhrzeigersinn weiter. Der Spieler, der gesockelt hat, beginnt, wenn sein Gebot erfolgreich war.

Im Folgenden finden Sie die Formalisierung der Schritte und Entscheidungen, die zu treffen sind.

$$\mathrm{d} = \text{statement}$$

$$\mathrm{F_i} = \text{dice on the table}$$

$$\mathrm{f} = \text{dubito}$$

$$\mathrm{v} = \text{calza}$$

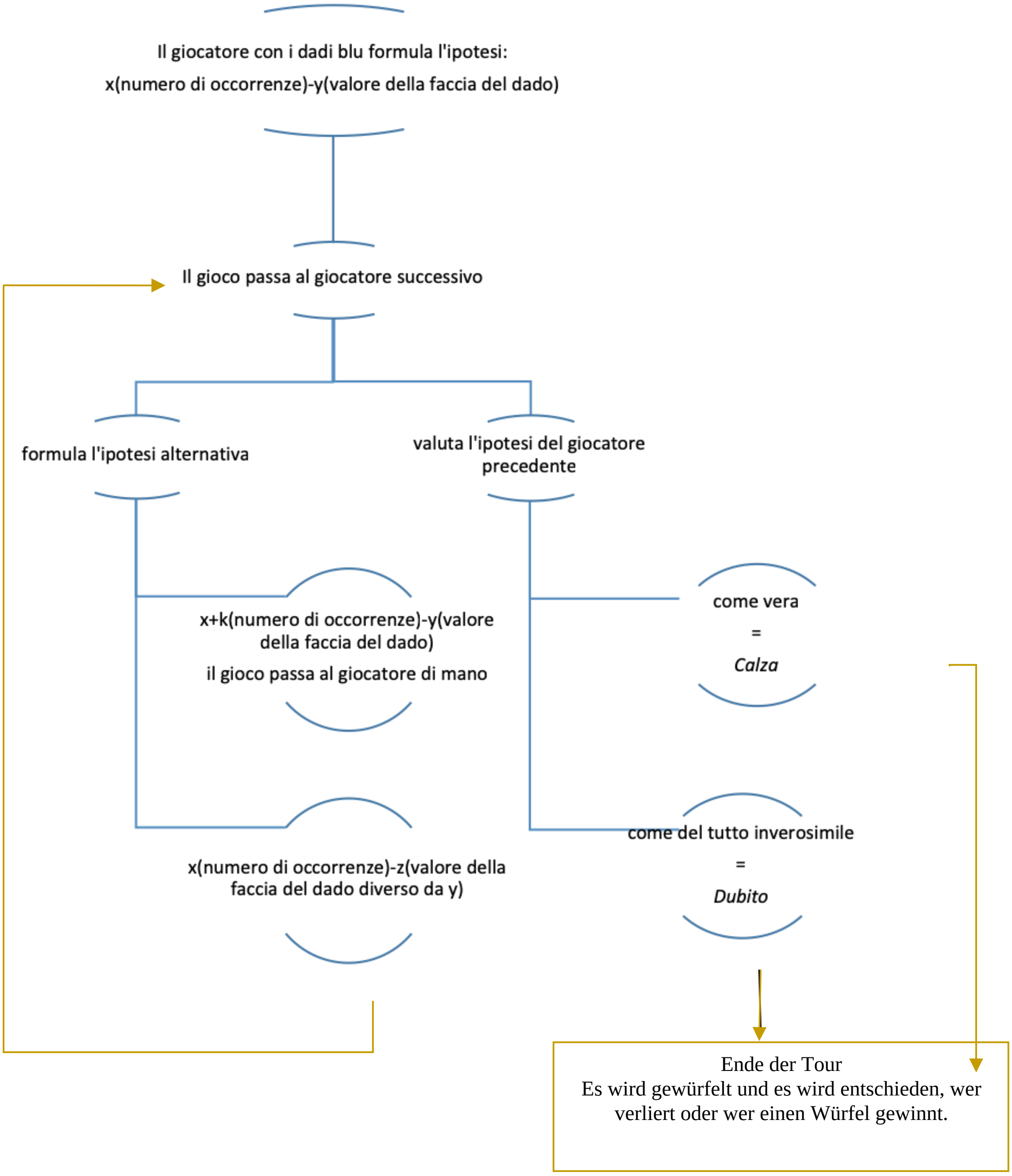
$$\mathrm{n} = \mathrm{n}° \text{ of dice} = 30$$

$$\mathrm{F_i} \rightarrow \mathrm{i} = \mathrm{n},\ (\mathrm{n}-1), (\mathrm{n}-2), \ldots,\ 1.$$

$$f\begin{cases} \text{win} \rightarrow d < F_i \\ \text{lose} \rightarrow d \geq F_i \end{cases}$$

$$v\begin{cases} \text{win} \rightarrow d = F_i \\ \text{lose} \rightarrow d < F_i \vee d > F_i \end{cases}$$

Überblick über den Ablauf des Spiels und die zu treffenden Entscheidungen:



Es wird also die Anzahl der gesetzten Würfel gezählt. Der Spieler, der *Stocking* erklärt, gewinnt, wenn die als Stocking gesetzte Zahl genau mit der Zahl auf dem Tisch übereinstimmt. In diesem Fall besteht der Gewinn aus der Rückgewinnung aller zuvor verlorenen Würfel. Wenn derselbe Spieler hingegen Zweifel erklärt, gewinnt er, wenn sich herausstellt, dass die angezweifelte Zahl anders oft vorkommt als die vom vorherigen Spieler gesetzte. In diesem Fall gewinnt er die Wette und der vorherige Spieler verliert einen Würfel.

In den anderen Fällen gewinnt der Spieler, der den Einsatz getätigt hat. Beim Zählen der Gesichter nehmen die Inka- oder Klingenköpfe, die als Joker zählen, den Wert des Würfels an, dessen Vorkommen gezählt wird. Der letzte Spieler, der noch mindestens einen Würfel hat, gewinnt.

Perudo ist ein Würfelspiel und scheint daher mehr mit Wahrscheinlichkeit als mit Statistik zu tun zu haben. Obwohl dem Glück beim Würfeln eine wichtige Rolle zugeschrieben werden muss, gewinnt man nicht mit Glück allein! Man muss sich eine bestimmte Strategie zurechtlegen, um die Schritte zu wählen, die man unternehmen will. Erfahrene Perudo-Spieler zweifeln zu Beginn des Spiels selten an den Einsätzen anderer, sondern warten, bis die Einsätze so hoch sind, dass sie riskieren, selbst von einem anderen Spieler herausgefordert zu werden. Es ist angebracht, auf die Köpfe der Inkas oder Lamas zu setzen, wenn der Einsatz nicht hoch genug ist, um den *Dubito zu* verlangen, aber zu hoch, um ihn mit angemessenem Vertrauen zu erhöhen. Die Kunst, bei diesem alten peruanischen Spiel zu gewinnen, besteht darin, zu wissen, ob und wann man einen eigenen Einsatz macht oder den des Vorgängers bewertet.

Und hier kommt die Statistik ins Spiel. Wenn wir Perudo in Konzepte der statistischen Inferenz übersetzen, können wir feststellen:

a) der Wert der Würfel und die richtigen Vorkommnisse, die gefunden werden müssen, um zu gewinnen, ist der Schätzer;
b) der tatsächliche Wert des Würfels mit den genauen Vorkommen ist der unbekannte Parameter;
c) Die Anzeige der eigenen Würfel und damit der Anzahl der Vorkommen und des Wertes des häufigsten Würfels ist die Stichprobenschätzung, aus der sich eine Stichprobenverteilung ergibt;
d) die Wette ist die Nullhypothese, die getestet werden muss;
e) der Einsatz des nächsten Spielers ist die alternative Hypothese;
f) das Risiko, zu verlieren, wenn Sie sagen '*ich zweifle*', ist α der Fehler der ersten Art (Ablehnung der Nullhypothese, wenn sie wahr ist);
g) das Risiko zu verlieren, indem man sagt '*es passt*', ist β der Fehler der zweiten Art (Annahme der Nullhypothese, wenn sie falsch ist);
h) die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, indem Sie "*Ich zweifle*" sagen, ist $1-\alpha$ das Signifikanzniveau der Hypothese;
i) die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn Sie 'Sock' sagen, ist $1- \beta$ der Stärke des statistischen Tests;
j) die wahrscheinlichste Wette ist der Erwartungswert der Gesichter (der sich aus der Summe der Erwartungswerte der einzelnen Gesichter und des Erwartungswerts der Blattgesichter ergibt, da es sich um unabhängige Ereignisse handelt). Und die Wette/Hypothese ist plausibel, wenn sie von den Beweisen gestützt wird. Wenn die Würfel verloren gehen, ändert sich der Erwartungswert, weil sich die Anzahl der möglichen Ereignisse und der wahrscheinlichen Ereignisse ändert;
k) die Hypothesen/Wetten der anderen können starke Hinweise für die Ableitung der wahrscheinlichsten Hypothese liefern. Der Erwartungswert ist lediglich die Synthese der Häufigkeitsverteilungen der Aussagen aller, die, wenn sie nicht bluffen, versuchen, sich

zunächst dem Modalwert des Auftretens und dann dem Erwartungswert anzunähern (mit steigender Anzahl der Aussagen tendiert der Modalwert zum Erwartungswert);

l) die Anzahl der Klingen (Jolly) im Spiel könnte als Ausreißer identifiziert werden, der bei der Formulierung von Null- oder Alternativhypothesen berücksichtigt werden muss.

Die Formulierung von Hypothesen auf der Grundlage von nur teilweisen Informationen über die Würfelansicht, die man besitzt, kann das Stichwort sein, um die Konzepte der teilweisen Information oder Erhebung und der Zensusinformation oder Erhebung im Unterricht einzuführen. Darüber hinaus können die Wetten schrittweise verfeinert werden, während man den Aussagen der einzelnen Spieler zuhört, so dass jede Wette stark mit der vorherigen Wette verknüpft und konditioniert wird. Bedingte Wahrscheinlichkeiten oder Theoreme zur Mengentheorie können sich sicher an den letztgenannten Überlegungen orientieren.

ALS AHMES, ASHA UND MAYA FREUNDE WURDEN UND LERNTEN, SICH AUFEINANDER ZU VERLASSEN.

(von Antonietta Mira)

Vor 3700 Jahren besuchten ein ägyptischer Junge, Ahmes - der im Alter von 40 Jahren ein berühmter Schreiber wurde und den Papyrus Rhind (1650 v. Chr.) niederschrieb - und ein junges indisches Mädchen, Asha, dieselbe Schule.
Unmöglich, werden Sie sagen. Dies ist ein Märchen, in dem alles möglich ist! Schließen Sie einfach die Augen und lassen Sie Ihrer Fantasie freien Lauf.

Am ersten Schultag kam Asha mit einer Tüte voller Mangos in die Klasse.

"Wenn wir Freunde werden wollen, müssen wir lernen, einander zu verstehen", sagte Asha zu Ahmes, "lassen Sie uns mit einem gemeinsamen System von Symbolen für Zahlen beginnen, so dass ich Ihnen jeden Tag Früchte bringe und wir zählen können, wie viele ich Ihnen gegeben habe.

"Du hast mir heute eine Mango geschenkt", bedankte sich Ahmes und zeichnete eine senkrechte Linie in den Sand.

I

"Sogar die brahmanische Schrift des alten Indiens im 3. Jahrhundert v. Chr. verwendete das Symbol I für die Zahl 1", erklärt Asha, die stolz auf ihre Vorfahren ist.

"Wie alt sind Sie, Ahmes?"
"Fragen Sie den Leser!", antwortete er und zwinkerte dem Leser zu... natürlich.

Nummer 1 ist also sowohl von Ahmes als auch von Asha ähnlich geschrieben: ein solider Ausgangspunkt für ihre Freundschaft. Das ist nicht überraschend. Praktisch alle Kulturen heute, aber auch in der Vergangenheit, verwenden ein ähnliches Symbol, um die 1 darzustellen, so wie wir es tun. Diese Praxis ist Zehntausende von Jahren alt und geht lange auf die Schrift zurück, die erst

fünftausend Jahre alt ist. Sie scheint von Jägern und Sammlern eingeführt worden zu sein, die, anstatt wie Ahmes in den Sand zu schreiben, Knochen oder Stöcke benutzten, um Mengen zu notieren, indem sie Kerben in den Boden schnitzten, so dass selbst nach einem Regen, der die auf den Boden gezeichneten Zeichen auslöschte, eine Spur zurückblieb. Geschnitzte Knochen und Stöcke hatten außerdem den Vorteil, dass sie von einem Ort zum anderen transportiert werden konnten. Und wie wir wissen, waren die Jäger und Sammler Nomaden: Wenn ein Land nicht mehr fruchtbar war oder die Tiere aufgrund von Wanderungen weniger wurden, zogen auch sie auf der Suche nach neuer Nahrung von einem Ort zum anderen.
"Kommen wir nun zu Nummer 2", fährt Ahmes fort und zeichnet mit seinem Finger zwei Linien auf den Boden, um anzuzeigen, dass er am zweiten Schultag zwei saftige Mangos von Asha geschenkt bekommen hat:

II

Und am nächsten Tag, um die Zahl 3 zu schreiben, verwendet Ahmes natürlich 3 Zeilen:

III

Anders als ihre Zeitgenossen, z.B. die Mesopotamier, gruppierten die Ägypter ihre I's nicht in bestimmten Mustern. So können zum Beispiel die drei Balken von Ahmes entweder waagerecht oder senkrecht angeordnet werden.

So weit, so einfach. Aber denken Sie an die Zahl 7: Beim Lesen konnte man leicht verwirrt werden, besonders aus der Ferne:

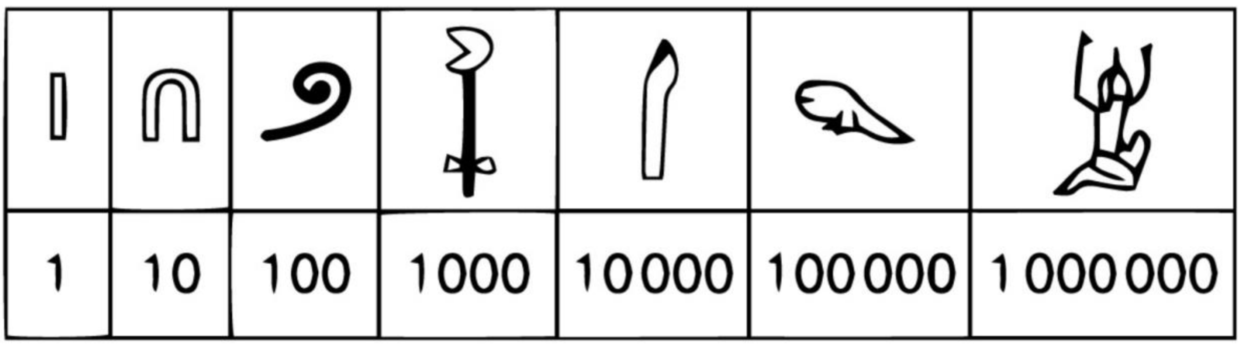
IIIIIII

Asha schlägt dann einige Abkürzungen vor: "Wenn wir die beiden Balken, die zwei Mangos darstellen, nehmen und sie waagerecht platzieren, macht das für Sie keinen Unterschied, und wenn wir sie in den Sand zeichnen, um schneller schreiben zu können, heben wir einfach den Finger, das ist es, was passiert".

So entstand das Symbol der Zahl 2, wie wir es heute kennen.

Und auf ähnliche Weise haben wir zum Beispiel die Zahl 3 und 7 mehr oder weniger so, wie wir sie heute schreiben würden:

Während es einfach ist, eine gerade Linie mit einem Messer in ein Stück Holz zu schnitzen, wäre das Schnitzen einer gekrümmten Form, wie unserer 2, unnötig schwierig. Ahmes fand Ashas Idee also interessant, blieb aber bei seinen Symbolen.
Ahmes war jedoch der Meinung, dass die Zahl 10 ein neues Symbol brauchte, um nicht durcheinander zu kommen, wenn man all diese Stäbchen hintereinander zählt. Das Gleiche gilt für die Zahlen 100, 1.000, 10.000 und 100.000. Dann wurde ein spezielles Symbol benötigt, um sehr große Zahlen zu kennzeichnen ... und darauf werden wir noch zurückkommen.



Von Ahmes verwendete Symbole.

Ahmes hatte eine interessante Art und Weise, Additions- und Subtraktionsoperationen durch ein Symbol in der Hieroglyphenschrift zu kennzeichnen. Es stellte einen Mann dar, der rennt: in Richtung der Mengen, wenn sie addiert werden sollten, in die entgegengesetzte Richtung, wenn sie subtrahiert werden sollten.

Ahmes hatte auch ein besonderes Symbol, das wir heute 'Null' nennen würden. Aber die Null wurde von Ahmes nur in der Architektur verwendet, um das Erdgeschoss einer Konstruktion wie einer Pyramide zu bezeichnen. Um die Stockwerke unter der Erde zu zählen, verwendete Ahmes das, was wir heute 'negative Zahlen' nennen würden. Damals wie heute genügte es, der Zahl ein spezielles Zeichen voranzustellen, um anzuzeigen, dass diese Etage unter der Erde lag. Die erste Etage unter der Erde: -1 würden wir schreiben.

Asha fand die Idee des 'Null'-Symbols sehr interessant und beschloss, es noch umfassender zu nutzen, nicht nur in der Architektur, sondern ganz allgemein, um Zahlen auf eine völlig andere Art und Weise darzustellen, das Positionszahlensystem.

Diese Idee wurde heimlich von Asha an Brahmagupta weitergegeben, einen Mathematiker und Astronomen, der im 6. Jahrhundert einen kleinen schwarzen Punkt als neues Symbol verwendete. So wurde das geboren, was wir heute als Null bezeichnen.

Um die Zahl eine Million darzustellen, bildete Ahmes einen Mann ab, der seine Arme zum Himmel erhob. Im Allgemeinen wurde dieses Symbol verwendet, um extrem große Zahlen darzustellen, genau wie wir es heute tun würden, wenn wir mit unseren Armen zeigen wollten, dass wir jemanden sehr lieben: Wir würden sie weit ausbreiten, um symbolisch unsere ganze Liebe zu zeigen!

Maya, der dieselbe Schule besucht und aus Guatemala stammt - in Mittelamerika, der Wiege der Maya-Zivilisation, die bereits 750 v. Chr. entstand. - möchte sich zu den Systemen der Zahlendarstellung äußern, da die Maya ein ausgeklügeltes Zählsystem entwickelt hatten, um zum Beispiel die Zeit zwischen zwei religiösen Ritualen, zwischen bestimmten astronomischen Ereignissen wie Sonnenfinsternissen, zwischen Perioden größerer oder geringerer Fruchtbarkeit der Erde zu berücksichtigen oder um Reisen an Unglückstagen zu vermeiden und stattdessen an günstigen Tagen am Ziel anzukommen.

"Wir haben 10 Finger und 10 Zehen, warum also nicht zur Basis 20 zählen?" fragte Maya. Das scheint tatsächlich sehr natürlich zu sein, wenn man bedenkt, dass die Menschen in jenen alten Zivilisationen meist barfuß liefen und daher Zehen ... zur Hand waren! 'Erklären Sie Ihre Idee besser', fragten Ahmes und Asha.

"Nehmen wir an, wir haben nur drei Symbole", fuhr Maya fort:
. Punkte, FRIJOL (Bohne), für die Einheit
Zeilen, PALITO (Stock oder Zahnstocher) für Nummer 5
O und eine Schale, das Symbol für Null

"Meiner Meinung nach reichen nur drei Symbole aus, um alle Zahlen zu schreiben", argumentierte Ahmes, der es gewohnt war, viel mehr zu verwenden.

Aber hier ist Mayas brillante Idee.
Das Symbol ändert seinen Wert je nach seiner Position. Eine Idee, an die die Ägypter nicht gedacht hatten. Für Ahmes war die Reihenfolge, in der die Symbole geschrieben wurden, tatsächlich irrelevant.

Stellen Sie sich vor, sagte Maya, Sie bauen einen Tempel der Zahlen - und Sie wissen ja, die Maya waren Meister im Bau von prächtigen Tempeln.

Je höher man in einem Tempel aufsteigt, desto mehr gewinnt man an Wert, und in der Tat finden wir an der Spitze von Tempeln in der Regel kostbare Altäre für Opfergaben an die Gottheiten.
Jetzt denken wir, dass die Symbole auf den höheren Etagen - oben geschrieben - mehr wert sind als die auf den unteren Etagen. Jedes Mal, wenn Sie eine Etage höher gehen, sind die Symbole 20 Mal mehr wert (wie Finger und Zehen zusammen).

Zum Beispiel ist eine Bohne im Erdgeschoss 1 wert:
. eine

Eine Bohne im ersten Stock ist 20 wert.
Hier ist also Nummer 21:
. zwanzig
. eine

Und Nummer 22
. zwanzig
... zwei

Und noch einmal Nummer 41:
... zwanzig x 2 = vierzig
. eine

Und wenn wir noch ein Stockwerk höher gehen, finden wir hier die Nummer 421

. 1 x 20 = 400 = vierhundert
. zwanzig
. eine

Dasselbe gilt für das Symbol 'Holz': Wenn es im Erdgeschoss platziert ist, haben wir die Zahl 5:

fünf

Aber wenn das Holz ein Stockwerk höher wird, steigt sein Wert von 5 auf 5x20 oder 100. Und so schreibt Maya die Zahl 105:
_ 5 x 20 = 100
_ 5

Und aus der Zahl 101 wird:
_ hundert
. eine

Und hier ist die überraschende und magische Nützlichkeit der Null: Um die Zahl 20 zu schreiben, brauchen Sie ein besonderes Symbol, die Null!

Die Zahl 20 wird von Maya also so geschrieben:
. zwanzig
0

Die Zahl 400:
. vierhundert
0
0

Und wenn wir eine Bohne im Erdgeschoss hinzufügen, kommen wir auf 401:
. vierhundert
0
. eine

Wenn wir dagegen einen Stock auf das Erdgeschoss legen, haben wir die Zahl 405:
. vierhundert
0
fünf

Ganz einfach, rief Asha! Sie entschied sich, Mayas 'positionelle' Idee beizubehalten (die Symbole haben je nach Position einen anderen Wert), wollte aber die Basis von 20 auf 10 ändern (und somit nur die Finger der Hände als Referenz verwenden) und entschied sich, statt mit nur 3 Symbolen mit 10 Symbolen zu arbeiten.

Anstatt zu höheren Ebenen aufzusteigen, ändern Ashas Symbole ihren Wert, indem sie sich nach links bewegen. Jedes Mal, wenn sich ein Symbol um eine Position nach links bewegt, wird sein Wert mit 10 multipliziert.
1
10
100

Und dasselbe gilt für Symbol 5:
5
50
500

"Ganz einfach, nicht wahr?", rief Asha und war begeistert von ihrer neuen, eleganten Art, Zahlen darzustellen.
Und so wurden Ahmes, Asha und Maya beste Freunde, lebten glücklich bis ans Ende ihrer Tage und konnten sich aufeinander verlassen... für die Ewigkeit, das heißt, für eine unendliche Zeit.
Und von der Unendlichkeit werden wir in einer anderen Geschichte sprechen!